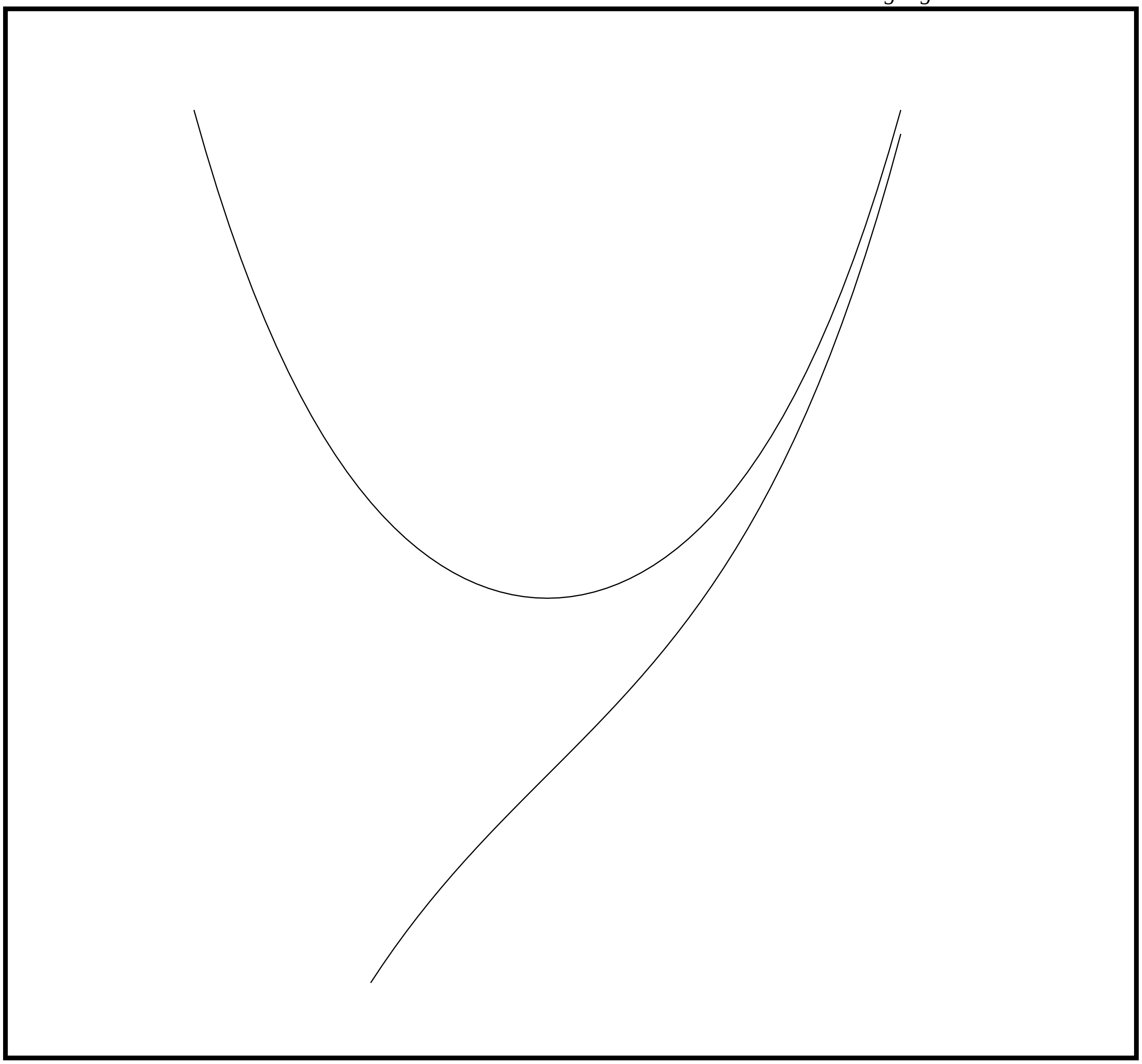
Svenska Matematikersamfundet

MEDLEMSUTSKICKET

15 februari 2010

Redaktör: Ulf Persson
Ansvarig utgivare: Tobias Ekholm



What should a Mathematician Know?: *Davis & Mumford*
Två klassiska läroböcker i analys: *Lars-Christer Böiers*
Matematik, ett fikonspråk?: *Nordberg & Persson*
Matematiska Memoarer I: *Gert Almkvist*
Norsk Examen:*Peter Lindqvist*
Sista Ordet: *Arne Söderqvist*

Årsmöte - Umeå 4-5 juni

UTSKICKET

utkommer tre gånger per år I Januari, Maj och Oktober. Manusstopp är den första i respektive månad

Ansvarig utgivare:	*Tobias Ekholm*
Redaktör:	*Ulf Persson*
Adress:	*Medlemsutskicket c/o Ulf Persson* *Matematiska institutionen* *Chalmers Tekniska Högskola*

Manus kan insändas i allehanda format `.ps, .pdf, .doc` Dock i tillägg önskas en ren text-fil. Alla texter omformas till `latex`

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET

är en sammanslutning av matematikens utövare och vänner. Samfundet har till ändamål att främja utvecklingen inom matematikens olika verksamhetsfält och att befordra samarbetet mellan matematiker och företrädare för ämnets tillämpningsområden.

För att bli medlem betala in avgiften på samfundets `plusgirokonto 43 43 50-5.`

Ange namn och adress på inbetalningsavin (samt om Du arbetar vid någon av landets institutioner för matematik).

Medlemsavgifter (per år)

Individuellt medlemsskap, *200 kr*
Reciprocitetsmedlem *100 kr.*
(medlem i matematiskt samfund i annat land med vilket SMS har reciprocitetsavtal):
Doktorander gratis under två år
Gymnasieskolor: *300 kr.*
Matematiska institutioner: *Större 5 000 kr, mindre 2 500 kr*
(institutionerna får sälva avgöra om de är större eller mindre).
Ständigt medlemsskap: *2 500 kr (engångsinbetalning)*

Man kan även bli individuellt medlem av EMS genom att betala in 220 kr till Samfundet och skriva EMS på talongen.

HEMSIDA: `http://www.swe-math-soc.se`

Här återfinnes bl.a. protokoll från möten

STYRELSE:

ordförande	*Tobias Ekholm*
	`018 - 471 63 99`
	`tobias@math.uu.se`

vice ordförande	*Mikael Passare*
	`08 - 16 45 46`
	`passare@math.su.se`

sekreterare	*Warwick Tucker*
	`018 - 471 33 18`
	`Warwick.Tucker@math.uu.se`

skattmästare	*Milagros Izquierdo Barrios*
	`013 - 28 26 60`
	`miizq@mai.liu.se`

5:te ledamot	*Jana Madjorava*
	`031 - 772 35 31`
	`jana@math.chalmers.se`

ANNONSER

(Dessa publiceras inom en ram som denna)

helsida 3000 kr
halvsida 1500 kr
mindre 750 kr

Annonser i tre konsekutiva nummer ger endast dubbla priser d.v.s. 1/3 rabatt

Annonser inlämans som förlaga
samt i förekomamnde fall som text-fil, Dessa formateras om i PostScript

Detta Nummer

Detta nummer kommer inte innehålla så många artiklar, i gengäld kommer de att vara ganska långa.

Först och främst kan jag erbjuda en artikel av David Mumford och Philip Davis. Det gäller en enkät de skickade ut för en tid sedan och ställer frågan 'Vad bör en professionell matematiker kunna?' Detta är en preliminär publicering syftet med vilket är att nå en större läsekrets och inhämta synpunkter. Så småningom skall en mer slutgiltig version publiceras (i vilken de långa oredigerade enkätsvaren endast kommer att förekomma i en strängt redigerad och kondenserad upplaga) i någon av de större matematiska tidskrifterna (troligen EMS Newsletter, möjligen också Notices). Utskickets läsare är således priviligerad att at del av denna 'sneak preview' och uppmanas att reagera. Som synes föreligger det bara ett skandinaviskt bidrag (symptomatiskt mitt eget).

Hur många av Utskickets läsare känner till Hylthen-Cavallius och Sandgren? Alla äldre läsare gör det uppenbarligen, och andra har under de senaste årens lopp erhållit ett antal hänvisningar av framför allt Jaak Peetre. Jag har bett Lars-Christer Böiers i hans egenskap av lundensisk läroboksförfattare att läsa de gamla verken och rapportera. Jag ser böckerna som en kulturgärning. De speglar svensk 1900-tals matematik med sin betoning på lokal analys och matematisk stringens vilken somliga skulle hävda ligger på gränsen till pedanteri. Som Böiers mycket riktigt påpekar, dessa böcker vore helt omöjliga att sätta i händerna på dagens studenter. För att ytterligare sätta dem i perspektiv och vrida åt nostalgiskruven ytterligare ett varv har jag också låtit beställa av artikelförfattaren lämpliga fascimil på ett och två betygsskrivningar från snart ett halvsekel sedan.

Är matematiken bara ett språk och kan mycket av de svårigheter som elever drabbas av i mötet med matematiken reduceras till språksvårigheter? Med andra ord har betydligt fler elever än vi anar förmågan att föra matematiska resonemang, det är bara det att de varken kan uttrycka sina tankar matematiskt eller igenkänna det formellt matematiska resonemanget som sitt eget. Vissa av våra läsare och debattörer hävdar detta. Jag är synnerligen skeptisk. Inte desto mindre har jag valt att publicera ett brev som en civilingenjör sänt till mig och Claes Johnson i samband med ett meningsutbyte jag och han hade i 'Ny Teknik' strax före jul. Jag har kompletterat brevet med att försöka göra en ansats till intervju.

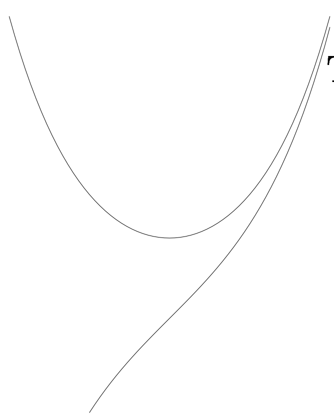
Jag har sedan länge efterlyst läsarnas personliga anekdoter och berättelser från sina liv som matematiker. Sådana har enligt min mening stort matematisk-kulturellt värde och borde vara av stort intresse för andra läsare. Hittills är det endast Jaak Peetre som hörsammat min vädjan, och jag har mycket riktigt publicerat utdrag ur hans egen matematiska biografi, som annars in extenso finns (eller har funnits?) tillgänglig på matematiska institutionen i Lund. Nu har en annan lundensare hörsammat detta allmänna kall och producerat ett manuskript på 40 sidor vilket jag ahr fått förmånen att kunna publicera. Författaren är Gert Almkvist, som nu gör en något försenad debut i Utskicket, men med råge eftersom jag har beslutat att publicera hans memoarer i sin helhet! Dock blir fyrtio sidor för långt i ett enstaka nummer, så jag har valt att spalta upp det i två avsnitt, och planerar att publicera det avslutande i nästa nummer.

Slutligen har vi 'Sista Ordet'. Jag skrev ett förslag i förra numret och vår korrekturläsare Arne Söderqvist har på synnerligen kort varsel uppfyllt min begäran att bidraga med ytterigare ett smakprov. Efter detta hoppas jag att läsare erbjuder sig självmant.

Trots förslag om att göra en ny lay-out på Utskicket med logga och nytt namn har jag valt att ligga lågt under våren. Jag avvaktar diskussionerna om Utskickets framtid vid nästa årsmöte innan jag gör några större förändringar.

Ulf Persson (redaktör) Göteborg 5 februari 2010

◇ ◇ ◇ ◇



Titelsidans illustration

Denna bild av graferna till de hyperboliska funktionerna prydde omslaget till Hylthen-Cavallius och Sandgrens 'Matematisk Analys I' vilken behandlas utförligt på annan plats i Utskicket. Dessa är två funktioner som fortfarande (misstänker jag) introduceras i elementär undervisning på universitetet dock utan någon motivation. Definitionera är enkla (och naturliga?) och de formella likheterna med de trigonometriska funktionerna slående, men dess signifikans framträder inte om de inte kopplas till hyperbolisk geometri (eller åtminstone till parametriseringen av hyperbeln).

Kort rapport

Tobias Ekholm

Sedan förra numret av Utskicket har samfundet varit med och arrangerat Sonja Kovalevskydagarna i Uppsala, 6–7 november och haft höstmöte i Göteborg 20–21 november där samtidigt också finalen i skolornas matematiktävling ägde rum. Huvudtalare under höstmötet var Mats Boij som höll ett föredrag med titeln ”Om koner av invarianter”. Övriga föredrag behandlade ett flertal olika områden och hölls alla av juniora matematiker. Jag befann mig (liksom vår vice ordförande) vid tiden för höstmötet vid MSRI, Berkeley och kunde därför inte närvara men har fått veta att föredragen var välbesökta. Samfundet var också närvarande vid Biennalen, som ägde rum i Stockholm 28–29 januari, och där representerat av Milagros, Jana och Mikael. Många besökare visade intresse för vårt bord och speciellt för matematiktävlingen.

Samfundet har också varit en av många remissinstanser i skolverkets arbete med en ny läroplan för gymnasiet. I skrivande stund är den tredje och sista remissrundan snart till ända. Vid varje runda har lämnats ungefär två veckor för att inkomma med synpunkter, så det har varit bråttom mellan varven. Våra synpunkter har än så länge fått något litet genomslag, men mindre än man skulle önska. Jag vill i samband med detta rikta ett stort tack till Jana som sammanställt styrelsens samlade tyckande i dessa frågor till mycket välformulerade anmärkningar.

Vad gäller aktuella samfundsaktiviteter kan nämnas att samfundet utlyser resestipendier för ograduerade forskare från Matts Esséns minnesfond och från Wallenberg stiftelsens resefond, se hemsidan för detaljer kring detta eller annonseringen på annan plats i Utskicket.

Närmast förestående samfundsarrangemang är vårmötet som kommer att hållas i Umeå, 4–5 juni (se även notis i Utskicket). Detaljerat program är ännu inte fastställt men stående punkter är årsmöte samt presentation av 2010 års Wallenbergpristagare och utdelning av själva priset.

Lite längre fram i tiden ligger Barcelonamötet, 16–18 september (samarrangemang med Catalanska samfundet) som jag nämnde i förra Utskicket. Mötet börjar nu ta form och kommer att ha följande sex sektioner:

- Complex and Harmonic Analysis
  Chairs: Bo Berndtsson and Joaquim Ortega

- Discrete Mathematics
  Chairs: Svante Linusson and Oriol Serra

- Dynamical Systems
  Chairs: Michael Benedicks and Tere Seara

- Geometry
  Chairs: Carel Faber and Miguel A. Barja
- Partial Differential Equations
  Chairs: Henrik Shahgholian and Neus Consul
- Didactics
  Chairs: Christer Bergsten and Marianna Bosch

Konferensens planerade format är som följer: sex plenarföredrag (en talare från varje sektion) samt åtta föredrag i varje sektion. Mer detaljerad information kommer att finnas tillgänglig från hemsidan inom kort.

Avslutningsvis vill jag nämna den utvärdering som Vetenskapsrådet (VR), och Stiftelsen för Strategisk Forskning (SSF) för närvarande gör av svensk forskning inom matematik. Utvärderingen baseras på peer-reviews och en expertpanel av internationellt erkända forskare inom matematik genomför den. Under veckan 14–18 juni kommer panelen att träffas för att sammanställa utvärderingen. Flera samfundsmedlemmar har uttryckt oro för vikande trender i VRs finansiering av matematik och speciellt för att allt för få projektansökningar från seniora matematiker beviljats på senare år. Utvärderingen är naturligtvis av central betydelse för VRs framtida satsningar på svensk matematisk forskning och jag hoppas att den faller väl ut.

◇ ◇ ◇ ◇

New York Times Blog

Steven Strogatz, en tillämpad matematiker vid Cornell presenterar för närvarande en serie av artiklar om matematik i New York Times.

Titlar som: Rock Groups; From Fish to Infinity; Loves Me, Loves Me Not(Do the Math); Math and the City

`http://opinionator.blogs.nytimes.com/author/steven-strogatz`

What Should a Mathematical Professional Know About Mathematics ?

Philip J. Davis and David Mumford

The growth of mathematics during the past hundred years has been one of the great intellectual success stories. The mathematical corpus has recently been categorized in a massive tree-structured list by the Mathematical Reviews. It fills forty one pages[1] that contain ninetyseven high-level categories which, in turn, contain perhaps fifteen thousand special topics. Example: 57Q91 Equivariant PL-topology. A typical successful researcher today may work productively in several of these categories in parallel, and later shift interest and work in several other categories more remote from his/her original field. Despite the vaunted "unity of mathematics", with all topics presumably interconnected, with all topics available "in principle" to all researchers, it has become extremely difficult for any one person to have a deep grasp of basic ideas in all areas of mathematics.

This was not always so. Alexander Ostrowski told one of the authors (P.J.D.) that when he came up for his doctoral examination at Göttingen in 1920 (advisors: Felix Klein and Edmund Landau) he has expected to know "the whole of mathematics". Bourbaki set out in the 1930's to write a comprehensive treatise which, when complete, would present a single structural edifice displaying the unity and inter-connectedness of all fields of mathematics. Andrew Gleason told the other author (D.M.) in the 1960's that he did not want the Harvard Qualifying Exam split into topics because the real mark of an educated mathematician was to be able to draw ideas in every field from his toolkit and combine them to untangle a new puzzle.

But it seems to us that there is now no one individual who can speak authoritatively for the whole mathematical corpus, understanding and assessing its contents, and predicting future developments. There is a famous experiment on Cuban cigar rollers which demonstrated that they reached a professional level of competence after approximately 10,000 hours of cigar rolling and then ceased to improve substantially. Perhaps this is a universal constant of career preparation or of the human cortex. After 10,000 hours, an apprentice in any field has learned the fundamentals of what he or she ever will learn. But now, even for the mathematically gifted, this simply isn't enough time to learn the length and breadth of math. When did knowing all of mathematics break through the 10,000 hour ceiling? Probably at some point between 1920 and 1960.

"The whole of mathematics" is, of course, much more than its printed (or now online) record of its theorem-proof material and its applications. Each of its topics, each of its individual results is embedded in an unarticulated cloud

[1] Mathemaics Subject Classification, May 2009.

of intuitions, imagery and speculation that varies from person to person and from time to time.

Against this background, we have raised the following question believing that answers would reveal an interesting and significant aspect of the status of contemporary mathematical practice:

What should a professional mathematician now know (2009) in order to be considered mathematically *educated* and not merely a brilliant specialist in some sub-sub field ?

In 2008/9, we sent this question to several dozen mathematically engaged individuals and have received answers that have varied widely both in length and in substance. Some individuals did not respond. Perhaps the publication of this article will stimulate readers to send us their views thus providing us with materials for an update.

We now present in alphabetical order the responses we have received including our own personal answers to the question written before we wrote to others. These responses will be followed, by way of summary, with our analysis and some general remarks.

◇ ◇ ◇ ◇

George Andrews (Pennsylvania State University)

I have not seen any recent discussion of this [question] . The only time it is discussed that I can recall is when the faculty considers what should be required in the graduate program. Usually this consists of knowledge of algebra, analysis and geometry/topology with qualifying exams associated with each. Obviously, in a tight job market, there will, at least, be private discussions of whether more applicable mathematics should be required of everyone.

Christa Binder (Technische Universitat, Vienna)

To your questionnaire: I don't consider myself to be a real mathematician - so I am not forced to be a specialist in a very small sub-sub-field and can afford the luxury to be interested in mathematics in general. I always have heard many talks on many different fields and my impression is, that the really excellent researchers can look above their special field - they know much more and they can apply their knowledge since they recognize similarities. And also the best students try to hear different lectures before specializing - but: I really was shocked when I heard that there are mathematicians with a degree and considered good, who never heard about continued fractions (for example). But to give a list, what should be known - that I would not even try.

Philip J. Davis (Brown University)

Insofar as we mathematicians are also teachers and educators, we like our students first to follow in our footsteps in terms of our choice of significant problems, methods, values. Once they have left the mathematical cradle (even earlier in some few but remarkable cases) they may exhibit the well advertised "freedom" that is said to characterize mathematics and extend the mathematica corpus in genuinely novel and exciting ways.

Thinking myself (egotistically) to be an educated mathematician I extrapolate from myself and say that at the very least, any educated mathematician ought to be acquainted with Real & Complex Analysis; Advanced Matrix Theory; Numerical Methods; Major Algebraic Structures; Groups; Fields, etc. ; Functional anaysis, Number Theory, Probability; History of Mathematics; Philosophy of Mathematics.

How much of these topics ? More is better, but at the very least the contents of the first graduate courses in each of these areas, assuming (again solipsistically) that they have been taught as I have taught them. But having lived beyond the biblical three score and ten years I should like to learn a bit more of what is currently going on in the mathematical world. What topics and how should they be presented? The problem of "geriatric advanced mathematical education" has hardly been discussed in the open literature.

Ivor Grattan-Guinness (Middlesex University)

Grattan-Guinness answered the question by supplying us with a 22 page article entitled On the relevance of the history of mathematics to mathematical education. This article can be found on the Internet. The point that is germane to the present inquiry is contained in the following clip:

'The tradition in mathematical education has always seemed to concentrate on mathematical knowledge; definitions, theorems, proofs, and so on. To me, such knowledge is necessary but not sufficient for mathematical education to be successful. For sufficiency we need to take on the broader concept of mathematical understanding: not merely the knowledge itself, but also its motivations (historical and heuristic), the ways in which it may be created, its underlying logic and proof-methods, and so on. In these respects the orthodox textbook (or lecture-course) presentation is often very inadequate. Such books are fine as long as the reader has learnt the mathematics already. They are excellent for those who are eventually going to be professional teachers or mathematicians, but often seem to be irrelevant to the other 99 per cent of the learning community. No wonder that it is common to find revulsion of mathematical education among ordinary people, and at least a feigned pride in their innumeracy.

Without deep, penetrating motivations, education is lost, and it is in providing these that I am sure that the history of mathematics can be of great service in mathematical education.'

Reuben Hersh (University of New Mexico)

Re your question. "to be considered mathematically "educated." Considered by whom?

Also, mathematically "educated" versus just plain "educated"–that is, NOT necessarily "educated" historically, philosophically, or morally, not necessarily "literate" with regard to literature, art, or general culture ????? [sic]

I do not consider myself qualified to answer this question.

On the contrary, thinking about it makes it instantly very clear how un-educated I consider myself to be. Years ago I stopped being upset, and reconciled myself to the fact that plenary talks at the annual national AMS-MAA bash are nearly always almost all virtually incomprehensible to me. I don't know much beyond the basic definitions about Lie groups, I don't know a thing about Hopf algebras or quantum groups, have barely an undergraduate's understanding of the Langland program. I know a little PDE, a little Markov process, a little nonstandard analysis, and the bare essence of the standard first-year grad courses. That's about it! I am so under-educated, I am almost ashamed to show my face in public.

So who am I to say what some other fellow "should" (whatever that means) "know" (whatever that means) in order to be "considered" (whatever that means) mathematically "educated", by the Lord knows who?

Arieh Isserles (Cambridge University)

What is "educated" in the question? You would not expected me to address a question on, say, Orlicz spaces without an agreed understanding between all of us what an Orlicz space is. Yet, when it comes to metaphysical concepts, it appears that we are allowed to answer a question without any broader understanding what it means. In the best spirit of traditional British logical positivism, I wish thus first to establish at least some sort of common ground. Once we have it - once we have established the axioms - surely answers will follow by classical rules of inference. Isn't it what (educated) mathematicians are supposed to do?

My stab at a definition of an 'educated mathematician' is this: it is somebody able to see not just the fine detail in (small) part of mathematics but also a broad-brush picture across the subject as a whole. To see the trees in part of the mathematical forest, but also the woods in its totality. To realize what the main intellectual constituent parts of mathematics are and how they interact together and enrich each other.

So, what is she supposed to know? To appreciate poetry you should at the first instance know the language, inclusive of the more boring bits of the grammar. Yet, we have to assume that any brilliant specialist in a (sub)n-field would have a decent first degree from a reputable maths department, hence we can take for granted the basics. So, what is she supposed to know beyond the standard undergraduate diet?

My first observation is that knowledge should not be confused with education. Google or Wikipedia are huge (virtual) depositories of knowledge, as are mathematical libraries. Are they "educated"? Is somebody able to recite, in a pub quiz fashion, more or less obscure details, definitions and theorems across mathematics, from Suslin lines to Pólya frequency functions, from quiver representations to dendriform algebras to Camassa-Holm models of turbulence, "educated"? Is anybody knowing by heart the three volumes of Dunford & Schwartz's Theory of Linear Operators "educated"? I don't believe so. Moreover, I believe that, paradoxically, a surfeit of such knowledge can be an obstacle to real education, since it encourages the view of the subject as a mishmash of unrelated detail.

As a matter of fact, I do not believe that knowledge of any advanced kind is the first thing that comes to mind (at least to my mind) in this context. Education is, first and foremost, a matter of attitude, of what you do with the mathematical Lego bricks (and why you collect them), rather than with the sheer size of your toy box. And, insofar as attitude is concerned, I wish to start from the witty, wonderful and wonderfully wrong Lillian Hellman's definition of education as 'casting false pearls in front of real swine'. My contention is that an educated mathematician's attitude is the total opposite: the pearls are real and the audience is held in total respect. Specifically:

1. An educated mathematician holds all parts of mathematics in respect and regard. You might fail to appreciate the subtlety and the intellectual depth of this-or-that-subdiscipline, but this doesn't prove for a moment that they are devoid of either. Your working assumption must be that the mote is in your eye. The fact that a mathematical community is clearly committing what might appear to you as mathematical crime does not necessarily void the last sentence. Quantum field theorists (whom in British tradition, I count among applied mathematicians) add infinity to infinity an infinite number of times, then throw away the first (infinite) term - and what is left matches experiment to 18 significant digits. The fact that we cannot justify each and every step of a Feynman diagram using classical mathematical rigour neither renders it wrong nor should it elicit disrespect.

2. Yet, an educated mathematician doesn't hold any part of mathematics in too much respect. The twin crime to the Jowett of Balliol's 'I am the Master of this College/What I don't know is not knowledge' (which we can sadly see in some of our more illustrious colleagues) is the feeling that I am but a modest expert in something narrow and will never be able to understand what these clever people in algebraic topology / model theory / category theory / geometry of Banach spaces / ... are doing". If you give up on parts of mathematics because they are "too clever" for you then, effectively, this is the same as giving up on them because they are too unimportant or "stupid" for you. OK, so maybe you'll never make the effort to understand algebraic K-theory, but you should have the belief that, had you really tried, you would have understood it.

3. Having reached this point, and agreed that our educated mathemati-

cian respects all of mathematics, regards it as intellectually interesting and challenging - yet not so challenging as to be beyond her understanding - the remaining ingredient is intellectual curiosity. The actual wish to understand what's going on across mathematics, how things connect and hang together. Ideally, to utter a gasp of admiration once a totally unexpected concept from one discipline is used to obtain a stunning result in another, at the other end of the mathematical graph, like using harmonic analysis to prove results on primes (the Green-Tao theorem) or using symplectic geometry to prove the Weyl conjecture in linear algebra or using cohomology groups to understand fluid flow. Wow!

Having reached this point, and described our ideal educated mathematician to Central Casting, I'll go back to the original question. So, what is she supposed to know, beyond the staple undergraduate material? (No, I am not trying to escape the question by recasting it - my appreciation of logical positivism doesn't extend that far.) My answer is informed by the above three requirements. There is a number of mathematical fields that, in addition to their own intrinsic merit, act as a bridge to the understanding of entire swathes of mathematics, and which anybody seeking to conform with points 1-3 should master at a deeper level. If you think about mathematics as a large graph (in the sense of graph theory), these are the high-degree nodes. I am laying no claims to an exhaustive list, since I am just trying to illustrate principles, while being painfully aware of my own limitations. I would definitely put differential geometry and functional analysis on this list, perhaps Lie-group and Lie-algebra theory, perhaps stochastic analysis. But I can give you a possible algorithm. Look at as many papers in as many journals as possible in a maths library and compile a list of their secondary AMS (MOC) subject classification, assuming that the primary classification is the sub-sub-field and the secondary the glue that attaches it to the rest of mathematics: the winners will be your shortlist.

I hope that, in a small measure and without any extravagant claims, this helps to address your question. And I have no doubts that other will give more exciting answers.

Peter Lax (Courant Institute, NYU)

Your question reminds me of a story, more or less true, about Von Neumann. He was explaining to a group of mathematicians that whereas at the beginning of the 20th century a mathematician could comprehend most of mathematics known at that time, today, in the middle of the 20th century, that is impossible. Someone asked him "How much of mathematics known today could a mathematician comprehend?". Von Neumann went into one of his ten second trances and answered "28 percent."

I can only speak for for myself. I know a lot about partial differential equations and their application,but there are gaps in my knowledge,such as material science,elasticity and relativity. What I feel most keenly is not knowing enough probability;I would urge everyone to learn as much of it as they can.

My knowledge of modern differential geometry is shaky; I would like to know what K theory is. I don't know too much topology or algebra, although I have worked on some problems in both fields that were related to PDE questions.

Samuel Johnson said that everyone would like to have as much Greek as they can get; this applies to most branches of mathematics. I hope this is of some help.

Yuri I. Manin (Max Planck Institut, Bonn and Northwestern University)

After some introspection, I have decided that for me a "mathematically educated" person is characterized by his/her attitudes rather than level of their fluency in various subfields of our trade. The former include:

1) Not only tolerance, but actual interest in different modes of thought: if I am a geometer, I should try to see mathematics as it is perceived by born calculators etc.

2) First-hand understanding of basic notions (introductory course level) of probability, homotopical and algebraic topology, functional analysis, commutative algebra, classical and quantum mechanics. (The list is tentative, of course).

3) An experience in teaching.

4) An experience in research: at least a handful of papers published in peer-reviewed journals.

I do not think I have to add more banalities to this list.

Barry Mazur (Harvard University)

An interesting and difficult question that Phil Davis and David Mumford posed is: What should a professional mathematician now know in order to be considered mathematically 'educated' and not merely a brilliant specialist in some sub-sub-field?

1. About the question itself, and its implicit assumption: It seems to me that grappling with exactly that sort of question is one of the many experiences that might be helpful for one's mathematical education. I also would not be entirely willing to immediately write off a 'mere brilliant specialist in some sub-sub-field' as being 'mathematically uneducated.' That is, I'm happy to allow the possibility that a very narrow channel may be all that certain professional mathematicians need in order to achieve a rich mathematical education. I'm cautious about actually naming names here, but I'm thinking of least two individuals whose mathematical minds I admire immensely, and who fit that description. These are people who have attained broad comprehension despite the specificity of their experience.

2 The fruits of education: When we think about the education of any

specific person (e.g., Henry Adams, or even T.C. MITS) [T.C. MITS; The Common Man in the Street: Lillian Lieber] we probably should focus on the particular set of limitations, foibles, and/or aspects of ignorance that the educational process did ameliorate (if we are viewing it in hindsight) or will ameliorate (if we are viewing it with hopes for the future)[2]. But, no matter where we each start from, when we engage in mathematically educating ourselves it seems to me that we hope to achieve ('in the end') two (somewhat different) sorts of things:

A. We want to have, at the very least, an acquaintance with a relatively large range of mathematical viewpoints: we want to have been exposed to an array of ways of looking and ways of thinking; we want to at least know about the existence of the broad traditions of mathematical experience; and for our core, we want to have a working mastery of a somewhat more select body of mathematics.

B. We want to develop in ourselves an innate lively inquisitiveness, and concomitantly an outlook, a disposition, that makes it natural and congenial for us to learn new things when it is appropriate to do so, and that makes thinking mathematics a vital activity for us; we want to foster the ability in ourselves to deeply appreciate a broad range of mathematics-to get pleasure from this 'gift of appreciation;' and we want to be sensitive to the varieties of mathematical taste. Surely it is the second item above that is the more important: it trumps the first; but it is the first item that we can hope to talk about, so let's talk about that.

3. Fields of acquaintance: Certain fields of mathematics, at certain times, play the role of lingua franca in the sense that mathematics from vastly different fields get formulated in the vocabulary, the terminology, or even more strikingly in the conceptual framework of that specific field. Weierstrass's theory of functions, Cantor's Set Theory and Group Theory have played (and continue to play) such a role; the vocabulary of Category Theory has permeated disparate disciplines. These are some of the grand forces in mathematics that shape our way of communicating to one another. Other fields formulate powerful viewpoints, templates, that cross over to distant disciplines - let's call these fields unifiers. Algebraic Topology has done service as a unifier, as has large aspects of Algebraic Geometry. Other fields are so ubiquitous that they cast light on all other disciplines of mathematics: measure theory, probability and statistics come to mind; perhaps aspects of combinatorics. In any epoch there will be the lingua franca, the unifiers and the ubiquitous of that epoch. A young (or an old) mathematician, of no matter what specialty, would do well to be acquainted-at least a tiny bit acquainted-with the mathematical goings-on in these fields. So which fields are of that sort these days ?

[2]The word itself comes, as I understand it, from an amalgam of *ex-* and *ducere* which hints at a process that leads us out of something and towards something else.

Critical mass. Before offering a concrete list of good 'fields of acquaintance' I want to convey an idea of a friend of mine, who is a student of European History. He tells me that at one point in his career studying European History, he experienced an abrupt phase shift. Once you've achieved - says my friend - a certain critical mass of historical information, all of a sudden your view of the entire subject changes. First, your power of simply retaining information increases multifold; but more importantly, your way of thinking about the subject[3] bears no relation to the way you approached things initially. My friend accounted for this surprising moment as a consequence of accumulation, perhaps to overload, of somehow-connected specifics that forced him to involuntarily re-configure - in a more meaningful way - his modes of organization, and contemplation, of the entirety of this corpus of knowledge. Well, it would be interesting if we could put our finger on the critical moments, the phase shifts - if they exist - in our mathematical education. If they do exist they may depend less on our having devoured any specific collection of mathematical ideas, and more on our having exposed ourselves to some un-specifiable critical mass. With this in mind, I'll end, below, with a list that nowadays, in my opinion, stands for 'fields of acquaintance' any critical mass of them being a good choice for a good mathematical education.

Types of mathematics. I am assuming that, on background, we have a mathematical education that would normally come from a good undergraduate curriculum, including-of course-standard ODE, Riemann surfaces, complex analysis more generally, and real analysis including measure theory and the theory of Fourier transforms. And the standard algebra/ Galois theory/ commutative algebra sequence. I also omit mention of number theory for the moment. Our undergraduate education would have done well for us if it left us with an abiding taste for what are, to my mind, the most classical four (very overlapping!) aspects of mathematical thought: Geometry, Algebra, Computation, and Mathematical Physics. I say that these are 'overlapping,' but in reality, what makes mathematics one subject is that nothing that we do is entirely contained in one of these categories: they seem to stand for distinct intuitions, and distinct realms of thought, and yet they are inseparably welded together. These four categories have been fused together so substantially in recent times that it may even be misleading to keep bringing them up. For there are subjects of great importance such as the theory of modular (or automorphic) forms that defy this categorization completely, since they stretch their substance, their tools, and the intuition they rely on over all four of these items. Nevertheless, Geometry, Algebra, Computation, and Mathematical Physics represent a recognizable, if wobbly, partition of mathematical thought, so it is convenient to use them as a way of organizing a wish-list consisting of some of the features of each of these

[3]Practically speaking it has to be a much more select body of mathematics!

categories that might be good to have nodding acquaintance with. I've tried to make a tentative and necessarily partial list of typical problems dealt with in each category such that some-at least-of these items would be good to acquaint ourselves with, and discover that this list changes radically from day to day. Here is today's:

- Geometry - in the broad sense: This can be experienced in so many different ways that any one person's 'critical mass' will be disjoint from another person's. Our sense of geometry might go from knot theory to differential geometry (and the related analysis; e.g., the spectrum of the Laplacian[4]) to classification of n-dimensional manifolds to symplectic geometry to dynamical systems to sphere-packing to fixed point theorems to K-theory to systems of elliptic PDE's in the large to the Index Theorem to Bott periodicity to the homotopy groups of spheres. . . and here we would be moving into the more algebraic realms of algebraic topology, which nowadays is also commingling with algebraic geometry.

- Algebra-in the broad sense. This includes the ubiquitous notion of groups (say; finite, finitely presented, Lie, algebraic, arithmetic, and adelic) and their linear and projective (finite- and infinite-dimensional) representations. It includes elementary aspects of any of the subjects with 'algebraic' as an adjective in their name: algebraic topology, algebraic geometry, and algebraic number theory. It includes the entire basic vocabulary of very general languages such as category theory and more specific languages of use in traditional functional analysis such as the theory of Hilbert and Banach spaces.

- Computation-in the broad sense. This stretches from machine computation, algorithms, numerical analysis, estimation, and statistics, to combinatorics, analysis and probability; i.e., ways of dealing with data, practically and/or theoretically.

- Mathematics related to Physics. Newtonian Mechanics, Optics, Maxwell's Equations, Relativity, some Quantum Mechanics and some physics related to field theories and string theory; and-of course-the mathematics that connects to this.

[4] I realized when I first made up the list, how little of it I felt adequately comfortable with - i.e. how much of a wishlist for my future education it represents!

David Mumford (Brown University)

That is quite an interesting question, especially as it impacts the issue of whether math can stay together as one field or whether it will split. Keeping math together requires that people give the question consistent answers and I rather doubt they would. Keeping math together also requires that writers of articles write more readable introductions using these accepted norms.

Another problem to bear in mind is that there are big vogues, ideas that gain sway and develop their internal highly specialized language. Examples are the Langlands program, Connes' non-commutative geometry, symplectic geometry and four-diml spaces all of which need more than a few days of intensive "adult education" to get into.

The question itself is pretty vague: the devil is in the details. Anyway, I suppose my answer would be roughly the content of the qualifying exam I had to pass, way back when, plus some important applied topics:

a. how to write a proof acceptable by today's standards,

b. knowledge of basic algebra (groups, rings and fields, number theory), basic geometry (topology including homology/homotopy gps, basic differential geometry, and a bit of algebraic geometry), basic analysis (Hilbert spaces, measure theory, some dynamical systems, basic PDE's and their well-posed solutions), basic complex analysis (analytic functions, ...), basic probability (combinatorics and Gaussians)

c. knowledge of some programming language and some idea of what can be computed fast,

d. some knowledge of math-physics, esp. basic mechanics. I don't know how far this should go.

Maybe we should ask what qualifying exams are given in various math departments.

Ulf Persson (Chalmers University of Technology)

Mathematics is culture, especially to the mathematician. To have a wide cultural command is obviously not the same thing as to be a brilliant mathematician or even a successful one, although there obviously is an intimate connection between the two. I would argue though that a wide mathematical culture has a value in itself, and just as it can enhance mathematical thinking, it can also inhibit its production. If mathematicians would generally be more mathematically cultured I think that there actually might be less mathematics published (as it would develope a more demanding taste?). On the other hand I would like to think that mathematicians would lead more satisfactory lives.

Mathematics is very divers to an extent unknown to non-mathematicians[5], on the other hand it is surprisingly unified. We would like to think that all

[5] I could easily give a survey of astronomy, but would be hard put to do the same with mathematics.

parts of mathematics have relevance to all other parts. And indeed we are always very gratified when special instances of this belief are being confirmed. In a deeper sense mathematics is of one cloth.

In many ways mathematics differs from the other sciences and shows more affinity with the humanities. Most papers are written individually or in close collaboration with a single co-author. While in Big Science there is more of an industrial and hierarchial approach, and consequently you can perform your duties as a biochemist say, without understanding or accepting Darwinism. In mathematics it is the ideas that count, while in science, the routine and tedious project is also of utmost importance[6]. You can be a scientist without being a scientific intellectual, but traditionally to be a mathematician means also being a mathematical intellectual. This places mathematics at a disadvantage when it comes to funding. Maybe economical pressures may change the way mathematics is being done by the majority. It could be that most mathematicians might prefer to being told what to do, and turning the subject into a more industrial and technical enterprise would have its advantages. On the individual level that would go against the cultural ambition and further encourage specialization and the alienation that goes with it. The specialized scientist is like the modern consumer surrounded by gadgets the working of which he or she does not understand. The cultured scientist is like a primitive Australian aboriginal with a vast and penetrating knowledge of his environment and how to relate and survive in it[7].

What should a professional mathematician be expected to know, and when and how would he acquire it? Like in most social issues tradition ultimately rules and education, in spite of valiant efforts to the contrary, is no exception. To try to impose a canon is obviously a pretentious thing, but I believe that the suggestions below are rather more of a recapitulation and as such hardly controversial. I also believe that the foundations of a personal mathematical culture are set fairly early on by the early years of graduate study, although there is a life-time of self-improvement ahead, the motivation for such can only be developed early on.

A) Mathematical Foundations and Logic: This is what Manin would term mathematical introspection. Although most professional mathematicians may be expected to 'grow out of it', it nevertheless provides a common ground for all mathematicians to meet at and it touches on philosophical questions which we do not have the option of evading[8]

B) Mathematical Analysis: Every mathematician is of course expected to master Calculus. The Riemann integral might be good for students, but the

---

[6] The mapping of the human genome being a typical example, involving how many man-hours?

[7] I have been told that the Australian aborigines are the most skilled trackers there are

[8] In this context one may include also some basic numerical analysis to see 'the spirit made flesh' connecting to the final remark.

professional always thinks in terms of the Lebesgue integral. The acquisition should be made through rigor on principle (thus including ϵ, δ yoga with no sweat). Analysis obviously includes complex analysis of one variable (and some rudiments of several complex variables) as well as familiarity with Fourier analysis. In analysis is usually included some basic point-set topology, Cantor sets and fractals and such things, and some basic functional analysis, especially Hilbert spaces.

C) Ordinary and Partial Differential equations should perhaps not be separated from Mathematical analysis, but I make a special entry for the sake of emphasis.

D) A large part of mathematics has been inspired by astronomy[9] and physics. And should have at least sufficient familiarity with such subjects to appreciate the development of B) and C).

E) Geometry. Traditionally high-school students were drilled in so called 'analytic geometry' with special emphasis on conics. This is now largely gone, but that is no excuse for the professional to be ignorant of it. Projective, hyperbolic geometry, manifolds, algebraic varieties, especially Riemann surfaces. Differential geometry, especially curvature.

F) Algebra: Groups, fields, rings etc, especially commutative rings. Familiarity with the combinatorics of finite groups and linear groups such as SL and their representation theory. Lie-algebras and Lie-groups not to be forgotten.(A professional should know Elie Cartans classification of simple Lie-algebras over the complexes.)

G) Number theory. Some basic algebraic number theory as well as analytic, and be versant say with the Riemann Hypothesis and know in some detail how it relates to the distribution of primes.

H) Probability theory. Versant in the language of stochastic variables. Also some statistics, as a mathematician in the eyes of the general public is often identified with a statistician! (And could provide a marketable skill.)

Of course the list could go on and on depending on the resolution desired. Maybe a more succinct way would be to present a kind of quiz as to 'extremal' points you would expect the professional to handle.

Finally as to computers, although they probably will play a larger and larger role in the doing of mathematics, I do not think they belong to a mathematical education per se. It is too trivial and the necessary skills are easily picked up. On a personal level I would recommend programming mathematics on a more basic level than just engaging commercial packages. As I believe this to be much more educational and stimulating to the mathematical imagination.

[9] I believe that many mathematicians were intrigued by that subject as children

Authors' Analysis and Remarks

Almost all the responses gave us some sort of list of significant mathematical topics, many quite long and extensive. Several responses even described what the writer doesn't know but wishes he knew - if only he had the time to push his education further and his understanding deeper. Some felt optimistic and excited by this challenge, others seemed to despair. All this certainly confirms our initial claim that the field of mathematics has grown explosively.

Looking at the chosen topics historically (as Grattin-Guiness recommends), several things are striking. Complex analysis is hardly mentioned, although it was arguably the central theme of pure mathematics in the 19th century, continuing strongly into most of the 20th. On the other hand, mathematical physics is mentioned in a large number of responses although, at the time the authors were trained, mechanics was being dropped from the standard math curriculum at many US universities. Probability was also considered a secondary topic at that time, though it is stressed in many of the responses and, indeed, its importance seems to have grown strongly during the author's careers. Thus, clearly, the specifics of the ideal education of a mathematician are changing all the time.

There are two broader themes in many responses which are, in some sense, opposite though not contradictory. On the one hand, some responses stress the vital importance of learning those topics which unify mathematics, which provide the glue which binds seemingly distant questions together and thus brings the researcher an immense sense of the unity of mathematics. They call these from various points of view the bridges, the unifiers, the lingua franca of the subject. The subjects of group theory, functional analysis, probability, some form of geometry were mentioned as examples.

But at the same time, other responses suggest that a truly educated mathematician needs to understand more than one mathematical mode of thought along with the viewpoint and motivation associated to it. They believe there really are multiple ways of approaching mathematics and research and even though you adopt one, it is best to know and respect these other approaches. This is perhaps clearest if we consider the motivations which drive various fields, as opposed to the raw list of their definitions and theorems and conjectures. One group may be focused on abstract existence proofs, another on constructions, another on computations; one group may delight in the elementary nature of the objects they seek to understand, another may be happily immersed in the study of things infinite in size, dimension or layers of complexity. Each of these tends to carry with it distinct ways of thinking and the educated mathematician is enjoined to have some acquaintance with each. Knowing something of the history of mathematics or the philosophy of mathematics is a step in the right direction here.

One of the authors (D.M.) wishes to add: for him studying a key example was often a better key to gaining some sense of new area than studying its list of theorems. He feels that most fields of mathematics have a small set of central examples which act as lighthouses to give the specialist his bearings in any new situation. These are, unfortunately, all too often part of the unspoken lore of a subject.

Perhaps we need to say: we certainly respect and sympathize with each of the above responses to our brash question.

◇ ◇ ◇ ◇

Finsk-Svensk Talteorikonferens

KTH 26-28 maj 2010

Konferensen ordnas av Pär Kurlberg, tillsammans med två finska post-docs - Anne-Maria Ernvall-Hytönen och Igor Wigman.

Hågade deltagare kan registera via ett e-meddelande till `hytonen[at]kth.se` snarast (Om resestöd önskas innan den 20 april)

För mera information länka till

`http://people.kth.se/~hytonen/meeting/`

Rondablikk, 7/1 2010

Två klassiska svenska läroböcker i analys

Lars-Christer Böiers

Det är väl knappast någon matematiker i Sverige på 1950- och 1960-talen som inte kommit i kontakt med de läroböcker i analys för nybörjarstadiet vid universitetet som författades av *Carl Hyltén-Cavallius* och *Lennart Sandgren*, båda från Lund. Bägge är numera avlidna, Sandgren för något år sedan. En del äldre lärare talar om böckerna med viss nostalgi. Det kan kanske därför vara läge att för senare tiders studenter berätta något om dem,

Matematisk analys I,   *Matematisk analys II,*

för ett respektive två betyg i matematik, som terminologin var på den tiden.

Böckerna ska ses mot bakgrund av de dåtida akademiska förhållandena. Bara en liten del av ungdomskullarna gick till gymnasiet, och bara ett fåtal fortsatte till universitetsstudier. Universitetens expansion kom i slutet av 1950-talet. När jag 1962 började studera i Lund hade universitetet omkring 10 000 studenter, och det talades om att så många fler fick det inte bli. Nu finns det över 40 000 studenter i Lund. Vad jag minns var vi runt 400 som började på matematik ett betyg ht 1962. (LTH hade startat 1961 och tog in 60 studenter.)

Samma författare hade tidigare gett ut en lärobok i plan geometri. Den användes inte som litteratur i Lund när jag kom dit. Den gamla geometrin hade då ersatts av en modernare kurs i linjär algebra. Men jag har hört äldre kollegor som haft den som kurslitteratur beskriva den som den trevligaste lärobok i matematik som har skrivits.

Matematisk analys I utkom 1956 och mitt exemplar från 1962 är fjärde upplagan.[1] Del II fanns 1962 bara i en maskinskriven version, och först senare har jag förstått att de lösa lappar som Hyltén-Cavallius hade som manuskript vid de föreläsningar jag bevistade vt 1963 i själva verket var korrekturet till den kommande tryckta boken. Den kom ut året därpå. Böckerna var om jag är rätt underrättad de första fullständiga läroböckerna i analys på svenska. Tidigare hade man använt tysk och fransk litteratur och en del kompendier (i Lund Frembergs kompendium). De två böckerna användes vad jag vet vid alla (då fyra) universiteten.

Den värld som öppnar sig då man nu bläddrar i dessa böcker är helt annorlunda än den vi lever i. Men det finns också likheter.

Matematisk analys I innehåller envariabelanalys, inklusive lite om diofantiska ekvationer, komplexa tal och polynom. Differentialekvationer saknas

[1]Det handlar här inte om den (enligt vissas åsikt urvattnade) nya version som kom 1968. Den var föranledd av nya kursplaner för universiteten på grund av reformering av gymnasiet.

dock helt. (I bland annat Lund användes ett kompendium av H. Gask för detta område.) Teorin framställs mycket omsorgsfullt, med höga krav på stringens. Den baseras på supremumaxiomet och andra axiom för reella tal. Bland annat ges en strikt definition av exponentialfunktionen. Detta motiveras i förordet med att man anser det värdefullt att en blivande lärare vet vilka svårigheter som möter om man vill korrekt införa exponentialfunktionen utan att gå via integraler.

Gränsvärden införs mycket omsorgsfullt, med stor detaljrikedom. Naturligtvis finns bevis för alla reglerna i de olika fallen $x \to \infty(-\infty)$, $x \to x_0$. Gränsvärden av talföljder har fått ett eget avsnitt. — Satserna om kontinuerliga funktioner bevisas naturligtvis, men vissa av bevisen är markerade som överkurs.

De teoretiska resonemangen är alltid omsorgsfullt presenterade, men jämfört med nuvarande förhållanden kortfattade och lämnar en del tankearbete åt läsaren, på ett sätt som inte nutida studenter skulle uppskatta.

Som exempel på teoretiska detaljer: för funktioner talas både om begreppet växande i ett intervall och begreppet växande i en punkt.

Integraler införs med supremumaxiomet som utgångspunkt. Två satser bevisas: en funktion som är monoton på ett kompakt intervall är integrerbar, och en funktion som är kontinuerlig på ett kompakt intervall är integrerbar. För den sista behöver man likformig kontinuitet. Att Riemannsummor konvergerar mot integralen bevisas, men det nämns inget om tillämpningar av detta.

Mot slutet av boken finns ett särskilt kapitel om kurvor. Det behandlar plana kurvor i parameterform, funktionsform och polär form. Bland annat diskuteras båglängd och krökning. Den formel för arean (ytan hette det då) av plana figurer som numera brukar återfinnas bland kurvintegraler härleds här. Det finns ett avsnitt om "kurvor med namn": cykloiden, asteroiden, Huygens' släpkurva, Cartesius blad, ... Av mina marginalanteckningar kan jag se att mycket var borttaget ur kursen 1962, men det hindrade ju inte att man läste det av intresse.

Envariabelboken avslutas med ett trevligt kapitel om matematikens historia, enligt förordet skrivet av Lars Gårding.

Matematisk analys II innehåller teorin för funktioner av flera variabler. Men förutom den finns där, liksom i böcker nuförtiden men mer omfattande, en framställning av topologiska begrepp. Såväl Bolzano-Weierstrass sats som Heine-Borels övertäckningssats och Cantors inkapslingssats finns med. Först behandlas satserna på linjen och i planet. Det allmänna n-dimensionella fallet kommer i ett senare kapitel. — Satserna om kontinuerliga funktioner visas med hjälp av Bolzano-Weierstrass sats.

Mycket uppmärksamhet ägnas åt sambandet mellan gränsvärdena $\lim_{x\to a} f(x)$ och $\lim_{k\to\infty} f(x_k)$, där $\{ x_k \}_1^\infty$ är en följd som konvergerar mot a. Som ett annat exempel på rikedomen av detaljer kan nämnas att man förutom vanliga gränsvärden också inför begreppen limes superior och limes inferior.

Del II innehåller ett särskilt kapitel om Riemannintegralen för funktioner av en variabel. Där skärps de satser som i del I visades under förutsättning att integranden är kontinuerlig till att bara förutsätta integrerbarhet.

För följder och serier behandlas bl.a. Cauchys konvergensprincip, Abels partiella summation med tillämpningar på serier, dubbelserier och teorin för likformig konvergens av funktionsföljder/serier. Bland annat finns här Dinis sats: om en följd av kontinuerliga funktioner definierade på ett kompakt intervall är monoton med kontinuerlig gränsfunktion så är konvergensen likformig.

Algebrans fundamentalsats bevisas som ett minimumproblem: för polynomet $p(z)$ betraktar man funktionen $|p(x+iy)|$ av två reella variabler, visar att denna har ett minimum och att detta är lika med 0. — Inversa funktionssatsen bevisas, men beviset är markerat som överkurs. Det tar 6 sidor. Satsen om variabelbyte i dubbelintegral visas också. Först ges en heuristisk motivering, ungefär som man gör numera, sedan kommer beviset, 8 sidor men markerat som överkurs.

Del II innehåller också i början ett kapitel om reella tal. Utgående från ett axiomsystem för de naturliga talen (lite mer omfattande än Peanos) definieras successivt $\mathbf{Q}_+$, $\mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}$. Härvid definieras de positiva reella talen med hjälp av Dedekinds snitt. (De komplexa talen definierades i del I.) Det är ett pedagogiskt knep, som enligt författarna går tillbaka på Landau, att undvika tekniska svårigheter genom att införa negativa tal sist.

Det förekommer ingen tredimensionell vektoranalys, men väl den tvådimensionella. Linjeintegraler kallades det på den tiden.

Ingen av böckerna innehåller den minsta antydan till tillämpningar. Det jag hittat vid genombläddring nu är kortfattat omnämnande av formler för rotationsvolym och rotationsarea. Därvid är författarna noga med att varna läsaren att man "bygger på åskådligheten" och inte på en strikt teori för begreppen. — Den fysikaliska bakgrunden till kurvintegraler omnämns kortfattat i del II.

Man lägger också märke till att böckerna inte innehåller så mycket lösta exempel, jämfört med nutida läroböcker. De exempel som finns där är utvalda med omsorg för att illustrera teorin, ibland föra den vidare i någon riktning, eller för att peka på någon viktig förutsättning. Det finns exempelvis bara ett genomräknat exempel på kurvritning i envariabelboken. Kanske förutsattes detta välbekant från gymnasiet. Nutida ofta hörda önskemål från studenterna om "fler lösta exempel" hade i vart fall inte tillgodosetts på den tiden.

De övningar som förekommer är också ofta av teoretisk natur; de inleds med orden "Visa att". Det finns inte så mycket rena räkneproblem. För den intresserade återges här några exempel från *Matematisk analys I*. De två första övningarna kommer från kapitlet om komplexa tal, de två sista från kapitlet om derivator.

- $z_1 \neq z_2$ och $z_3 \neq z_4$ är fyra komplexa tal. Visa att sammanbindningslinjen mellan z_1 och z_2 är vinkelrät mot sammanbindningslinjen mellan z_3 och z_4 då och endast då
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = 0.$$
- Visa att om z är ett komplext tal sådant att $|z-2| \leq \sqrt{3}$, så följer att $|z-1| + |z-3| \leq 4$. När kan det bli likhet i den sista relationen?
- Visa att ekvationen
$$\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \ldots + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{1} + 1 = 0$$
har *en* reell rot, om n är udda, och ingen, om n är jämnt.
- Funktionen f är deriverbar i det slutna intervallet $a \leq x \leq b$ och $f'(a) \neq f'(b)$. Visa att $f'(x)$ i intervallet $a < x < b$ antar varje värde mellan $f'(a)$ och $f'(b)$. (Sats av Darboux, fransk matematiker, 1842–1917.)
Ledning: Visa först att den kontinuerliga funktionen $\varphi(x) = f(x) - \mu x$, där μ är ett godtyckligt tal mellan $f'(a)$ och $f'(b)$, antar antingen sitt största eller minsta värde i det inre av intervallet (a, b).

Den sista övningen nämns ofta då äldre matematiker diskuterar minnen av *Matematisk analys I*.

Här kommer några övningar från del II:

- Beräkna $\overline{\lim}$ och $\underline{\lim}$ för talföljden $\Big(\sin(\nu^3\pi\log(1+\nu^{-1}))\Big)_{\nu=1}^{\infty}$.
Anm: log skrives numera ln.
- Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $x \geq 0$ och $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existerar. Vi betecknar detta gränsvärde med $f(+\infty)$. Bevisa att
$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = \Big(f(0) - f(+\infty)\Big)\log\frac{b}{a} \qquad \text{om} \quad a > 0,\ b > 0.$$
(*Frullanis integral.*)
- Konvergerar eller divergerar
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e - (1+\frac{1}{n})^n}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}\ ?$$
- Funktionen f är kontinuerlig i $0 \leq x \leq 1$. Visa att
$$\lim_{h\to+0} \frac{1}{\log h} \int_0^1 \frac{f(x)}{x+h}\,dx = -f(0).$$

Jag kan inte låta bli att nämna följande exempel, som kommer efter satsen att en dubbelintegral kan skrivas som en itererad enkelintegral:

- Om f är definierad och deriverbar i ett öppet område samt $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ existerar och är kontinuerlig, så existerar också $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ och är lika med $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.
  Bevis: ...

En tydlig skillnad mot nutida läroböcker är att det inte finns så många figurer. Det har säkert att göra med det komplicerade sätt på vilket man framställde tryckta böcker på den tiden. Själva boken skulle sättas, med mycket handarbete då det gällde matematisk text (dyrt!), och av de ritade figurerna skulle det göras klichéer som sedan skulle passas in i texten. När väl klichén var gjord fanns inga möjligheter att manipulera figurens storlek.

För att få lite perspektiv på *Matematisk analys I–II* har jag bläddrat något i en av dess föregångare, *de la Vallée Poussin: Cours d'Analyse Infinitésimale*. Denna bok kom i första upplaga före första världskriget, och nionde upplagan som jag tittat i kom 1943. Den boken (del I) klarar av både en- och flervariabelanalys och lite till på knappt 450 sidor. På de första 20 sidorna hinner man definiera de reella talen via snitt och presentera teorin för gränsvärden inklusive Cauchys konvergensprincip.

I Matematikcentrums bibliotek hittade jag också ett exemplar av Nils Erik Frembergs kompendium från 1941, som användes i ettbetygskursen i Lund. Det är maskinskrivet, sammanfattar matematiken ganska kortfattat men avstår från att ge många bevis. Man får inte intryck av en sammanhängande matematisk teori.

Mot bakgrund av dessa två böcker gör *Matematisk analys I–II* ett fräscht och modernt intryck, och böckerna måste ha uppfattats så av samtida studenter. I de nya svenska böckerna får man ett helt annat intryck av *lärobok*. Författarnas erfarenheter som universitetslärare har tydligt satt sina spår. Svåra avsnitt behandlas omsorgsfullt, med tydliga påpekanden till läsaren (även om formuleringar som "inses omedelbart" är talrika). Till exempel behandlas uppåt begränsade mängder och övre gräns genom exempel i ett par sidor innan axiomet presenteras. Gränsvärden då $x \to \infty$ diskuteras informellt via ett par sidor motiverande exempel innan definitionen formuleras. Man tog sig tid till sådana inledande motiveringar, kanske mer än vad som görs nuförtiden. Men man tog igen det genom en kärv och kortfattad stil i bevis och exempel.

Att få litteraturen på svenska var säkert en stor tillgång för studenterna, även om på den tiden alla läste franska i gymnasiet.

Jag återger i faksimil några sidor ur *Matematisk analys I*. Det första utdraget är de tre första sidorna i kapitlet om funktioner. Man noterar den långa inledande diskussionen, och hur omsorgsfullt summa, produkt, etc. av funktioner definieras. Nästa utdrag är hämtat från kapitlet om gränsvärden, efter bevisen av räknereglerna i fallet $x \to \infty$. Precis innan vi kommer in har man i ett exempel ställt frågan om gränsvärdet av en kvot av polynom. Lägg märke till det koncisa beviset för satsen om gränsvärde av en monoton, begränsad funktion.

Jag tror inte nutida nybörjarstudenter skulle ha någon behållning av att studera dessa böcker; för de allra flesta är deras teoretiska bakgrund och förmåga för svag. Men jag skulle föreställa mig att de kan vara av intresse för verksamma lärare och doktorander vid universitet och högskolor. Nutida framställningar brukar försöka jämna vägen för studenterna genom att lätta upp förutsättningarna i satserna så att bevisen ska bli enkla. I *Matematisk analys I* och *II* kompromissas det inte; här driver man i de flesta fall teorin så långt det går. I det avseendet påminner man om äldre böcker. — Kan någon komma över ett antikvariskt exemplar försvarar det utan tvekan sin plats i bokhyllan.

Appendix. För den intresserade återger jag på de följande sidorna några gamla tentamensskrivningar från 1960-talet i Lund. En skriftlig tentamen på den tiden ägde rum i två dagar, med fyra uppgifter varje dag. Skrivtiden var fem timmar per dag. Det var en dag emellan att ta igen sig på. Godkänt brukade vara 4.0 poäng eller något lägre. För den som blev godkänd väntade muntlig tentamen på teorin.

Jag ska kanske också förklara: kursen för ett betyg var den som nybörjare som kom direkt från gymnasiet läste på höstterminen. Med nutida terminologi omfattade den alltså 30 hp. Kursen för två betyg var lika stor, och lästes av de flesta på våren.

De fyra universiteten samarbetade om skrivningskonstruktionen. (Man måste alltså ha skrivning samtidigt på alla ställen.) Man turades om att göra en skrivning, förslaget skickades till de andra, vilka hade rätt att byta ut uppgifter om man så ville.

I Lund övergavs detta system för tentamina 1963 om jag minns rätt, och ersattes då med flera skrivningar under kursens gång. Detta var ett försök att komma tillrätta med de dåliga tentamensresultaten i matematik. Sådana är ingen ny företeelse.

KAPITEL 6

FUNKTIONSBEGREPPET OCH DE ELEMENTÄRA FUNKTIONERNA

6.1 Definition av funktion

6.1.1 Inledning. I matematiken spelar funktionsbegreppet en central roll. Redan under medeltiden kom funktioner att på olika sätt få betydelse, framför allt genom naturvetenskapliga tillämpningar. Efter hand skapades klasser av funktioner såsom polynom, trigonometriska funktioner samt exponential- och logaritmfunktioner. Ännu i dag har dessa s.k. *elementära funktioner* en viktig ställning, och vi kommer att träffa på dem ständigt i fortsättningen. Ordet funktion introducerades av Leibniz (1646—1716), men fastän det redan under 1600- och 1700-talen uppkom mera komplicerade funktioner än de elementära, förblev det allmänna begreppet opreciserat ända fram till början av 1800-talet. Den dominerande synen var att en funktion av x är ett »matematiskt uttryck», som på ett eller annat »analytiskt» sätt kan bildas med hjälp av variabeln x och fixa tal. Den förste som gav en modern definition av funktionsbegreppet var Dirichlet (1805—1859). Han lämnade den svävande föreställningen om det »matematiska uttrycket» för att i stället helt enkelt säga, att *en variabel y är en funktion av en variabel x om till varje värde, som x får anta, på något sätt är ordnat ett värde på y.* Senare har denna definition blivit noggrannare preciserad, och vi ger i 6.1.2 en modern version.

6.1.2 Funktion, grafisk bild, definitionsområde, värdeförråd. Låt oss betrakta ett par (x, y), där x och y är två tal givna i en viss ordning. Vi säger, att paret (x, y) är ordnat och kallar talet x den första komponenten och talet y den andra komponenten. Observera, att om $x \neq y$, så är (x, y) och (y, x) *olika* ordnade par.

Låt nu f beteckna en *icke-tom mängd* av sådana ordnade par och antag, att mängden f är sådan att det *inte* finns två par i f med samma första komponent x, dvs.

(1) $$\text{om } (x, y_1) \in f \text{ och } (x, y_2) \in f \text{ så är } y_1 = y_2.$$

Under denna förutsättning skall vi kalla f en *funktion.*

Vi inför nu i planet ett parallellkoordinatsystem, som oftast väljes rätvinkligt.[1] Om vi representerar talparen (x, y) i funktionen f som punkter i detta koordinatsystem, får vi en punktmängd (se fig. 1), som är sådan, att det på varje linje l parallell med y-axeln ligger *högst en* punkt i punktmängden. Punktmängden kallas den *grafiska bilden* av funktionen f eller *funktionskurvan.* (I fig. 2 har vi uppritat en punktmängd, som skäres av en viss, med y-axeln parallell linje l i mer än en punkt, och därför inte representerar en funktion.)

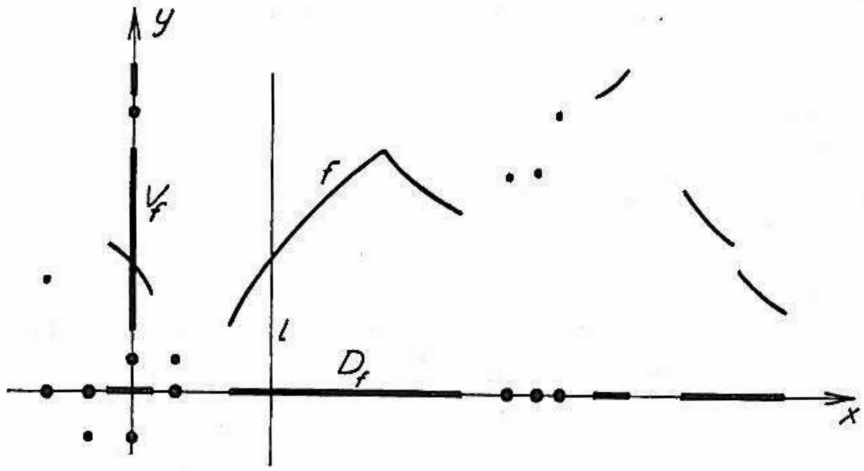


Fig. 1.

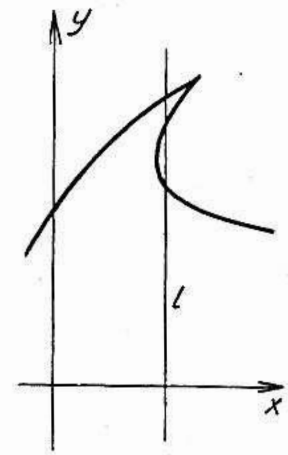


Fig. 2.

Mängden av de tal x, som förekommer som första komponenter i talparen i en funktion f, kallas funktionens *definitionsområde* D_f. Mängden av de tal y, som förekommer som andra komponenter i talparen i f, kallas funktionens *värdeförråd* V_f. Om punkterna på den grafiska bilden av f (jfr. fig. 1) projiceras på x-axeln och y-axeln, får man på dessa axlar två punktmängder som representerar D_f resp. V_f. Både definitionsområdet och värdeförrådet kan naturligtvis vara mycket komplicerade mängder, men vi förutskickar redan här, att åtminstone definitionsområdet i de flesta fall i det följande kommer att utgöras av intervall (se 2.3 sid. 18).

Enligt definitionen av en funktion f är till varje tal $x \in D_f$ ordnat ett entydigt bestämt tal $y \in V_f$, nämligen det y, för vilket paret $(x, y) \in$ mängden f. Vi kallar y för *funktionens värde* i punkten x och använder beteckningen $f(x)$ för detta värde, dvs.

(2) $$y = f(x).$$

Vi kan då säga, att

(3) $$f = \text{mängden av talpar } (x, f(x)).$$

Det är ibland bekvämt att använda följande terminologi:

[1] När vi i fortsättningen talar om ett rätvinkligt system, menar vi alltid ett system, där basvektorerna dels är vinkelräta, dels båda har längden 1.

Bokstaven x, som representerar ett godtyckligt tal i definitionsområdet, kallas funktionens *oberoende variabel* eller *argument*. Bokstaven y, som representerar ett godtyckligt tal i värdeförrådet, kallas funktionens *beroende variabel*. Vi säger också, att (variabeln) y är en funktion av (variabeln) x.

Observera, att definitionen av funktion innebär att två funktioner f och g är *lika*, dvs. mängderna f och g innehåller samma par, då och endast då $D_f = D_g$ och $f(x) = g(x)$ för alla $x \in D_f$ $(= D_g)$. Vi skriver $f = g$ men använder också beteckningen $f(x) \equiv g(x)$ (utläses: $f(x)$ identiskt lika med $g(x)$).

Summan $f+g$, skillnaden $f-g$, produkten fg och kvoten $\dfrac{f}{g}$ av två funktioner f och g definieras naturligtvis på följande sätt:

$$f+g = \text{mängden av alla ordnade par } \big(x,\, f(x)+g(x)\big) \text{ för vilka } f(x)+g(x) \text{ är definierad,} \tag{4}$$

$$f-g = \text{mängden av alla ordnade par } \big(x,\, f(x)-g(x)\big) \text{ för vilka } f(x)-g(x) \text{ är definierad,} \tag{5}$$

$$fg = \text{mängden av alla ordnade par } \big(x,\, f(x)g(x)\big) \text{ för vilka } f(x)g(x) \text{ är definierad,} \tag{6}$$

$$\frac{f}{g} = \text{mängden av alla ordnade par } \left(x,\, \frac{f(x)}{g(x)}\right) \text{ för vilka } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ är definierad.} \tag{7}$$

Vi observerar att i (4), (5) och (6) definitionsområdena utgöres av de x, som tillhör både D_f och D_g, medan definitionsområdet i (7) utgöres av de x, som tillhör både D_f och D_g *och för vilka* $g(x) \neq 0$.

Ovan har vi återfört definitionen av funktionsbegreppet på mängdbegreppet, varigenom själva ordet funktion fått en bestämd mening, nämligen som en mängd av par med en viss egenskap. Talparsdefinitionen blir emellertid ibland språkligt otymplig, varför vi i det följande oftast kommer att använda andra uttryckssätt såsom: Till vart och ett av vissa x-värden ordnas ett och endast ett värde $f(x)$, och därigenom definieras en funktion f med de tillåtna x-värdena som definitionsområde.

Vi belyser nu med några exempel både den ursprungliga definitionen och några av de ekvivalenta formuleringar, som användes i det följande.

Exempel

1. Låt f vara mängden av alla ordnade talpar (x, y), där y är ett fixt tal c. Då är f en funktion, vars definitionsområde utgöres av alla x och vars värdeförråd är det enda talet c. Man säger, att f är *konstant* och skriver

$$f(x) = c \text{ för alla } x \text{ eller } f(x) \equiv c.$$

Den grafiska bilden är en rät linje parallell med x-axeln.

Bevis: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\dfrac{a_0}{1}+\dfrac{a_1}{x}+\ldots+\dfrac{a_n}{x^n}}{\dfrac{b_0}{1}+\dfrac{b_1}{x}+\ldots+\dfrac{b_n}{x^n}} =$

$$= (\text{enligt VII}) \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{b_0}{1}+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_n}{x^n}\right)} =$$

$$= (\text{enligt I}) \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_0 + \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_1}{x}+\ldots+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_n}{x^n}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} b_0 + \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{b_1}{x}+\ldots+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{b_n}{x^n}} =$$

$$= (\text{enligt II}) \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_0 + \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_1 \cdot \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}+\ldots+\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n\left(\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\right)^n}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} b_0 + \lim\limits_{x\to\pm\infty} b_1 \cdot \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}+\ldots+\lim\limits_{x\to\pm\infty} b_n\left(\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\right)^n} =$$

$$= (\text{eftersom } \lim_{x\to\pm\infty} C = C \text{ och } \lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0) \ \frac{a_0+a_1\cdot 0+\ldots+a_n\cdot 0}{b_0+b_1\cdot 0+\ldots+b_n\cdot 0} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Ovanstående bevis är formellt inte helt korrekt, eftersom existensen av varje led beror av det efterföljandes existens och denna inte är säkerställd, förrän man hunnit till sista ledet. Strängt taget skall alltså beviset läsas baklänges. För överskådlighetens skull kommer vi emellertid även i fortsättningen att skriva räkningarna i ovanstående ordning.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin 1/x = 0$, ty enligt 6.5(59) sid. 128 är $0 < \sin 1/x < 1/x$ för $x > 1/\pi$, och eftersom $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x = 0$, följer av V att $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin 1/x = 0$.

Övningar

11. Beräkna $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^5-10000\,x^4}{1-0{,}00001\,x^5}$.

12. Existerar $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3})$?

13. Existerar $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x\cos x^2}{2x^2+x\sqrt{x}}$?

7.1.5 Monotona funktioner. I 7.1.2 visade vi (sats 1 sid. 140) att om funktionen f har ett gränsvärde då $x\to+\infty$, så är f begränsad i en omgivning av $+\infty$. Vi påpekade också, att omvändningen av denna sats ej gäller för allmänna funktioner, vilket exemplifieras av funktionen $\sin x$. Om vi emellertid inskränker oss till monotona funktioner gäller omvändningen.

Sats 4: *Om funktionen f är monoton och begränsad i något intervall $x \geq c$, så existerar* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Bevis: Det räcker att utföra beviset då f är växande, ty om f är avtagande är $-f$ växande. Då f är begränsad uppåt existerar $A = \sup_{x\geq c} f(x)$. Alltså finns till varje tal $\varepsilon > 0$ ett tal ω, sådant att $f(\omega) > A - \varepsilon$. Men då f är växande gäller $f(x) \geq f(\omega)$ för alla $x \geq \omega$. Härav följer, eftersom $f(x) \leq A$, att $A - \varepsilon < f(x) \leq A$ för alla x sådana att $x > \omega$, dvs. $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existerar och är $= A$.

På motsvarande sätt bevisas:

Sats 5: *Om funktionen f är monoton och begränsad i något intervall $x \leq c$ så existerar* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Exempel

8. *Sats* 6: *Om* $0 < a < 1$, *så är*

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0. \tag{29}$$

Bevis: Funktionen a^x är avtagande. Eftersom den är > 0 är den begränsad nedåt och alltså existerar

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = A.$$

Nu är tydligen också $\lim_{x\to+\infty} a^{x+1} = A$ (jfr. övning 6 sid. 139), medan å andra sidan enligt II sid. 141 $A = \lim_{x\to+\infty} a^{x+1} = a \lim_{x\to+\infty} a^x = aA$, och härav följer, att $A = aA$. Då $a \neq 1$ får vi alltså $A = 0$.

Vi ger också ett bevis för (29) med hjälp av en uppskattning. Då $0 < a < 1$ kan vi skriva $a = 1/(1+p)$, där p är ett fixt tal > 0. Om n är ett naturligt tal är $(1+p)^n > np$ (detta inses omedelbart med hjälp av binomialteoremet eller med induktion, jfr. exempel 2 sid. 2). Om $x \geq n$ är alltså

$$a^x \leq a^n < \frac{1}{np}.$$

Härav följer, att om ε är ett godtyckligt tal > 0, så är

$$0 < a^x < \varepsilon \text{ för } x \geq n > \frac{1}{\varepsilon p},$$

vilket enligt gränsvärdesdefinitionen betyder att (29) gäller.

En gränsvärdesundersökning kan anses bestå av två problem, dels problemet att avgöra om gränsvärdet *existerar*, dels *beräkningen* av gränsvärdet. Ibland är det så, att man, sedan man väl vet att gränsvärdet existerar, relativt lätt kan beräkna det. (Det första beviset för (29) illustrerar detta.) Fördelen med de monotona funktionerna är, enligt sats 4 och 5, att existensen av gränsvärdena i allmänhet är lätt att bevisa, eftersom det räcker att visa att funktionerna är begränsade.

Lunds Universitet
Matematiska Institutionen

Tentamensskrivning för ett betyg
Nya kursen.
Torsdagen den 7 december 1961.

Tydliga men inte alltför långa motiveringar skall lämnas. Figurer skall ritas i förekommande fall.

1. Visa att $\log(1 + 4x) > \operatorname{arctg} 3x$ för $x > 0$.

2. Lös ekvationen
$$z^n - z^{n-1} - z^{n-2} - z^{n-3} - \ldots - z - 2 = 0$$
fullständigt.

3. En punkt som vid en avbildning överföres i sig själv kallas en fixpunkt till avbildningen. Undersök för alla möjliga par av tal a och b mängden av fixpunkter till avbildningen
$$x' = ax + 3y - 9$$
$$y' = 2x + 3y + b.$$
(Parallellkoordinatsystem).

4. Rita kurvan $y = e^{-x} \log(ex)$ med angivande och undersökning av eventuella extrempunkter och asymptoter.

Lunds Universitet
Matematiska Institutionen

Tentamensskrivning för ett betyg.
Nya kursen
Lördagen den 9 december 1961.

Tydliga men inte alltför långa motiveringar skall lämnas. Figurer skall ritas i förekommande fall.

5. Lös differentialekvationen
$$y'' + 9y = x^2.$$

6. Bevisa att
$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) dx$$
är konvergent och ange dess värde.

7. Undersök om gränsvärdet
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1-\cos x)}{\log|x - \sin x|}$$
existerar och ange i så fall dess värde.

8. I ett parallellkoordinatsystem har punkten P koordinaterna (2,3,t). Man sammanbinder P med punkterna (0,0,0) , (1,0,0) och (0,1,0) och betecknar sammanbindningslinjernas skärningspunkter med planet $x + y + z = 2$ med A,B och C. Låt nu V(t) beteckna volymen (räknad med tecken) av tetraedern PABC. Visa att V är en rationell funktion av t. Ange denna funktion och undersök för vilka värden på t den a) antar värdet 0, b) inte är definierad. Förklara geometriskt vad som inträffar i de olika fallen.

Lunds Universitet
Matematiska Institutionen

Tentamensskrivning för ett betyg
5 december 1962

Tydliga, men inte alltför långa motiveringar skall lämnas. Figurer skall ritas i förekommande fall.

1. Bestäm alla primitiva funktioner till $\sin\sqrt{x}$, $x > 0$.

2. Undersök om gränsvärdet
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$
existerar och ange i så fall dess värde.

3. Bevisa olikheterna
$$x - \frac{x^3}{3+x^2} < \operatorname{arctg} x < x - \frac{x^3}{3+2x^2}$$
för $x > 0$.

4. Sök ekvationerna för två vinkelräta plan genom origo, vilka bildar vinkeln $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ med vektorn $(1,1,1)$ då man vet, att ett av planen går genom punkten $(1,0,\frac{1}{3})$. (Ortonormerat system.)

Lunds Universitet
Matematiska Institutionen

Tentamensskrivning för ett betyg
7 december 1962.

Tydliga, men inte alltför långa motiveringar skall lämnas. Figurer skall ritas i förekommande fall.

5. Avståndet mellan punkten $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=0 \end{cases}$ och det plan, som går genom punkterna $(0,1,2)$, $(0,0,1)$ och $(1,0,2)$ betecknas med $f(t)$. Sök minimum av funktionen f.

6. Undersök kurvan
$$\begin{cases} x=e^t+e^{-t}-\frac{5}{2} \\ y=e^t-e^{-t} \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty$$
med avseende på eventuella asymptoter. Undersök också extremvärden för x och y samt i vilka punkter och under vilka vinklar kurvan skär axlarna.

7. $z=\cos\theta + i\sin\theta$, där $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ är en punkt på enhetscirkeln. Visa att
$$\arg(1+z+z^2+z^3) = \frac{3\theta}{2}.$$

8. Visa att om $-g(-x)=g(x)$ och $-h(-x)=h(x)$ i en omgivning $(-d,d), d > 0$, till origo, så gäller $y(x)=y(-x)$ i denna omgivning för varje lösning y till differentialekvationen $y'(x)+g(x)y(x)=h(x)$. g och h är kontinuerliga funktioner.

Lunds Universitet
Matematiska Institutionen

Tentamensskrivning för två betyg
Tisdagen den 15 maj 1962

Tydliga men inte alltför långa motiveringar skall lämnas. Figurer skall ritas i förekommande fall.

1. Lös för alla värden på konstanten a ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (2-a)x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + (2-a)x_4 &= 0 \\ ax_2 + x_3 + x_4 &= 0 \,. \end{aligned}$$

2. Bestäm ekvationen för de plan som går genom x-axeln i ett ortonormerat xyz-system och som skär ytan $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ utefter två ortogonala linjer.

3. I det komplexa talplanet är hörnen i två trianglar z_1, z_2, z_3 resp. w_1, w_2, w_3. Visa att trianglarna, med hörnen uppräknade på angivet sätt, är likformiga då och endast då

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & w_1 \\ 1 & z_2 & w_2 \\ 1 & z_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

4. Definiera

$$f_n(x) = (x-1)x^{-n}, \quad x \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \,.$$

Undersök funktionsföljden $(f_n)_1^\infty$ med avseende på likformig konvergens i olika intervall (även oändliga intervall).

Lunds Universitet
Matematiska Institutionen

Tentamensskrivning för två betyg
Torsdagen den 17 maj 1962

Tydliga men inte alltför långa motiveringar skall lämnas. Figurer skall ritas i förekommande fall.

5. Bestäm eventuella lokala extremvärden till funktionen

$$x^3 + 2x^2 + xy + y^2 .$$

6. Beräkna volymen av den kropp som definieras av

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$y^2 + z^2 \leq 1 . \quad \text{(Ortonormerat system.)}$$

7. Visa, att det finns exakt en deriverbar funktion $y = f(x)$, som satisfierar differentialekvationen

$$y' \cos x - y \sin x = \cos x$$

i intervallet $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ och ange denna funktion.

8. Visa att om $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, och det existerar ett tal γ, $0 < \gamma < 1$, sådant att $\overline{\lim_{n \to \infty}} (a_{n+1} - \gamma a_n) \leq 0$ så är talföljden $(a_n)_1^\infty$ konvergent och $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Lunds Universitet
Matematiska Institutionen

Tentamensskrivning för 2 betyg
Onsdagen den 15 maj 1963

Tydliga, men inte alltför långa motiveringar skall lämnas. Figurer skall ritas i förekommande fall.

1. Lös för alla möjliga värden på a ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y + z = a - 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$$

2. Beräkna

$$\iint_D (A^2x^2 + B^2y^2)\, e^{A^2x^2 + B^2y^2}\, dx\, dy, \quad \text{där } A > 0,\ B > 0$$

och $D = \{(x, y);\ A^2x^2 + B^2y^2 \leq 1\}$.

3. Bestäm punkten P i xy-planet så att tangentkonen till sfären $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ med toppen i P skär planet $x + 2y - z = 0$ utefter en cirkel. Bestäm också cirkelns yta. (Ortonormerat system.)

4. A och B är två mängder i planet. A är kompakt, dvs. sluten och begränsad och B är sluten. Visa, att $A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$ är sluten.

Lunds Universitet
Matematiska Institutionen

Tentamensskrivning för 2 betyg
Fredagen den 17 maj 1963

Tydliga, men inte alltför långa motiveringar skall lämnas. Figurer skall ritas i förekommande fall.

5. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' + y' + y = e^x \cos x .$$

6. Sök sup och inf av funktionen f, definierad genom

$$f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 2y \quad \text{för} \quad 2x^2 + y^2 \leq 12 .$$

7. För vilka reella x konvergerar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n+1} x^n, \quad \text{där } S_n = \sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu \ ?$$

8. Låt $(f_\nu)_1^\infty$ och $(g_\nu)_1^\infty$ vara två följder av funktioner definierade på det slutna och begränsade intervallet I : $a \leq x \leq b$. Antag att g_ν är kontinuerliga på I och att $|f_\nu(x)| \leq M$ för alla ν och för alla $x \in I$. Antag vidare att $f_\nu \to f$ och $g_\nu \to g$, i båda fallen likformigt på I. Visa att $f_\nu g_\nu \to fg$ likformigt på I.

Anteckningar från Norge: examenssystemet

Peter Lindqvist

Alla folk har sina seder och bruk. Ju längre bort man far, desto mera exotiska och bisarra sedvänjor möter man. Men då det gäller universiteten behöver man inte resa längre än till Norge för att finna säregna ritualer, helt obegripliga för den oinvigde. Ett härligt exempel är det ålderdomliga examenssystemet i Norge. Maken till besvärlig ritual finns knappast kvar någon annanstans. En tentamen uppfattas icke som en "pedagogisk" angelägenhet utan den är en del av rikets förvaltning: sålunda gäller "forvaltningsloven". Detta tror man vara världens mest rättvisa system och det tangerar ett *tabu* att komma med negativ kritik. I de Blindas Rike är den seende kung, heter det, men det gick ju illa för huvudpersonen i H. G. Wells' novell "The Country of the Blind". Det lönar sig alltså inte att försöka förklara att enklare förfaranden kunde duga, nej, inte i Norge.

Den komplicerade proceduren vid varje tentamen (= examen på norska), hur obetydlig denna än är, är i korthet följande:

1. En extern censor, som vanligen är anställd vid ett annat universitet, utpekas av fakultetens styrelse. Censorn får brev om saken. Detta göres skilt för varje kurs.

2. Professorn, som har föreläst kursen, borde i god tid diskutera tentamensfrågorna med censorn, som i princip skall ha sitt ord med i laget. (Ofta hoppas detta steg över.)

3. Texten till tentamen måste skrivas både på norska (bokmål) och nynorska. (Detta är så viktigt!). Exempel: "Finn alle løsninger av systemet ..." = "Finn alle løysingar av systemet ...". Ibland skall texten dessutom stå på engelska. (Då blir det två språk men tre texter.)

4. Tentamen övervakas av inspektorer. Dessa är vanligen pensionärer, som tjänar extra. Professorn måste dock patrullera en rond under tentamen.

5. Till sist ankommer studenternas besvarelser till institutet, inpackade i konvolut. Inspektorerna har räknat antalet sidor inlämnade av varenda student och skrivit sitt namn på första sidan samt skrivit upp alla studentnummer på konvolutet. Här blir det många arbetstimmar och mycket pengar!

6. Professorn läser och korrigerar besvarelserna.

7. Besvarelserna sänds till censorn som i sin tur korrigerar dem. Institutskontoret har bråda dagar med att packa och adressera de rekommenderade försändelserna.

8. Professorn och censorn träffas. (Ofta blir det en resa och en reseräkning som till sist belastas skattebetalarna.) En långtråkig procedur beståar nu i att jämföra och gå igenom alltihopa på nytt. Censorn är så väl betald att han gärna är mycket grundlig. Det passar att diskutera bagateller i bedömningen. Vitsorden (= karaktererna på norska) bestäms. (Vid oenighet har censorn sista ordet.)

9. Vitsorden sänds till Studieadministrationen, som kontaktar studenterna.

Nu börjar följande rond, den invecklade *klagoproceduren*.

10. Studenten kan be om en motivering av bedömningen genom att skriva till Fakultetskontoret, som sänder en kopia av besvarelsen till professorn. Nu finns två möjligheter: antingen skriver professorn en redogörelse, som går till studenten, eller också uppmanas studenten infinna sig för en muntlig redogörelse (naturligtvis går även detta via Fakultetskontoret).

11. Studenten kan besvära sig över (klaga på) tentamen, ånyo via Fakultetskontoret, vilket naturligtvis har anställda enkom för dessa "klagesaker". Vidare har universitetet en jurist som ägnar sig åt detta.

12. En klagonämnd utnämnes av Fakulteten. Den skall bestå av två nya personer: en från professorns institution och en ny extern censor. –Det räcker faktiskt med en klagonämnd per kurs. (Här har man försummat en ypperlig chans att ytterligare krångla till proceduren.)

13. Fakulteten skriver till klagonämnden, vilken censurerar den klagandes tentamen på nytt. Studenten får ett nytt eller samma vitsord.

Klagoproceduren är mera regel än undantag. Det är helt normalt att klaga. Med tiotusentals studenter kan det bli absurt. En kurs utan klagonämnd är ovanlig. Ty en underkänd student kan t.ex. aldrig förlora på att belasta systemet med sin klagan.

Proceduren ser ut att involvera så många ovidkommande personer som möjligt. Detta kan lättast förstås genom det gamla rådet: *följ pengarna*. Många av de involverade personerna (utom professorn själv) vinner ju på att komplicera proceduren. Mycket arbete blir många anställda och mera pengar. Ett år använde NTH i Trondheim 14 miljoner kroner på censuren.

En liten förenkling har man fått till stånd. År 2003 infördes "kvalitetsreformen" i Norge. Nu har varje kurs en "tillsynscensor" och den *dubbla* korrigeringen göres icke längre varje gång. Men klagoordningen är lika hopplös som förut. Många tycks aldrig ha kunnat acceptera denna lilla förenkling i censuren och de blir nostalgiska vid tanken på alla lyckade censurer de har upplevt i sina dagar! Man fnyser åt att bara en person läser igenom besvarelsen: det kan ju bli lika orättvist som i USA! Till all lycka tycks ungdomen vara mindre insnöad, så i sinom tid kanske Norge får samma system som EU, kanske redan år 2050? Norrmännen själva anser i allmänhet att de har världens bästa examenssystem. Allt har sin tid men denna seglivade myt är svår att utplåna.

◇ ◇ ◇ ◇

Årsmötet i Umeå 4-5 juni

Årsmötet i Umeå kommer att äga rum den 4-5 juni, med själva årsmötesförhandlingarna fredagen den 4 juni. Program samt dagordning är ännu inte fastställda. Dock ett av huvudmomenten kommer att vara presentationer(/n) av de(n) ännu icke utvalda (/e) Wallenpristagarna (//en) samt givetvis prisutdelningen. Under årsmötesförhandlingarna kommer med största sannolikhet också Utskickets framtid att diskuteras.

Rondablikk, 8/1 2010

Matematik - ett kodspråk för de invigda?

Strax innan jul hade Claes Johnson och jag ett meningsutbyte i 'Ny Teknik'. Claes Johnson hävdade att matematikkurserna i skolan är förålddrade och borde vara betydligt modernare och häftigt IT-anpassade, medan jag som vanligt nostalgiskt drog en lans för den traditionella skolmatematiken, speciellt dess betoning på geometri och problemlösning. Ett sådant meningsutbyte på nätet brukar generera en del mer eller mindre insiktsfullt 'chattande'. Jag läste inte allt, ty det mesta som skrives är ganska beklämmande såväl formellt som idêmässigt, även om Arne Söderqvist lojalt försökte hålla nivån uppe på diskussionen. Dock fick både Claes och jag ett personligt e-brev som jag fått tillåtelse av författaren att publicera. Det är knappast ovanligt att finna bittra uttryck för matematikfientlighet[1], men vad som frapperade mig i detta brev var dels den uppriktiga tonen och det faktum att brevskrivaren uppenbarligen har fallenhet för den typ av abstrakta resonemang som vi förknippar med matematiken. Vissa av Utskickets läsare kommer givetvis att se detta inlägg som en bekräftelse på att matematiken är ett språk och lär vi bara ut språket kommer mer eller mindre alla förstå vad det handlar om. Jag tror inte alls att det är så enkelt men inte desto mindre, även om brevet på intet sätt rubbar min grundläggande ideologiska inställning, så innebär det en tankeställare och en varning för alltför svepande formuleringar utan empirisk bas. Jag kommer först att presentera brevet här nedan och sedan försöka komplettera det men en liten intervju med författaren. Mera didaktiskt orienterade kolleger borde kunna underställa det en djupare analys och formulera mera relevanta frågor och är hjärtligt inbjudna att så försöka.

Hej Ulf och Claes,

Jag är civilingenjör från KTH Elektro 1982 och arbetar numera som radioplaneringschef för TeliaSoneras mobilnät i Sverige, Norge och Danmark. Arbetet innebär att jag har ansvaret för att ta fram strategiplaner, planera utbyggnad, kapacitetsförändra, kvaliteten i 2G/3G/4G radionäten, alltså alla basstationerna och transmissionen i mobilnäten. Det handlar om mycket avancerad teknologi och väldigt mycket pengar i både CAPEX och OPEX, flera miljarder per år. Jag vill bara ge min syn på det här med matematik och det jag upplevde på KTH.

Jag vet inte vad jag ska säga mer än att jag hade ett helvete att klara mattekurserna, jag hade två kurser med betyget 4 resten klarade jag med 3:or. MEN det märkliga var att i de tillämpade ämnena som transmissionsteknik, signalteori, elektronik, fysik, mekanik, programmering, radioteknik, mikrovågsteknik, teoretisk elektroteknik osv hade jag betygen 4:or och 5:or

[1] Ett typiskt exempel på detta är debattinlägget av Eva-Lotta Hulthen, kulturskribent på Göteborgs Posten, vilket publicerade i Aftonbladet den 31 januari i år.

i. Jag vill bara säga att jag fattade inte mycket av matematiken förän jag såg vad den kunde tillämpas för. Jag har tänkt på det här många gånger då jag var nära att knäckas av matematiken de första två åren på KTH, som tur var fanns det några andra ämnen som jag förstod mig på. Jag minns att vi hade en matematikkurs i tvåan som hette Funktionsteori Fortsättningskurs, som jag än idag inte fattar hur jag kunde klara av, jag får fortfarande rysningar av den kursen. Dessutom har jag absolut ingen som helst nytta av den kursen för någon annan kurs på KTH eller senare i arbetslivet. Nå vad vill jag säga med det här, jag tror att matematik är en speciell begåvning som likt schackspelade, vissa individer är bra på just det. I mitt fall fanns absolut ingen större korrelation mellan matematik och ingenjörskonst. Jag har otroligt lätt för att förstå komplicerade samband inom teknik och ekonomi. När jag ser hur man tillämpar en teknologi så kan jag räkna på det, annars är matematik ganska obegripligt för mig.

Frågan är om inte matematik är ett överskattat ämne, det är naturligtvis fantastiskt för dem som kan se det vackra i de matematiska bevisen och de underbara härledningar som man gör. Men frågan är vad det betyder för den vanlige civilingenjören? Ibland fick jag en känsla av att det bara var ett kodspråk för de invigda. Som sagt när jag utgår från mig själv så lyckades jag aldrig se det vackra i matematik, inte heller kan jag påstå att matematiken hjälpte mig. Det var faktiskt så att jag förstod matematiken när jag läste de tillämpade ämnerna, alltså det omvända. Det var då det blev roligt att bli civilingenjör, när jag förstod hur ett digitalt filter fungerar eller hur radiovågen sänds/mottas på antennen. Då var det inga problem att ställa upp matematiken när jag såg sambandet mellan tillämpningen och matematiken.

Jag vill inte på något sätt nedvärdera matematiken som ämne, men jag är övertygad om att man kan gå bakvägen för oss som är begåvade på annat än matematik. Det tråkiga är att min son går samma linje som jag gjorde på KTH Elektro för 33 år senare och han har samma helvete som jag med matematiken. Han har också lätt för de andra ämnena så jag ger honom tröst att inte bli knäckt över matten. De var 50 st som började på Elekro för 1,5 år sedan nu är de bara drygt 30 kvar. Flera har såkert slutat p.g.a matematiken. Jag kan förstå att matematik har hamnat i en kris när det blivit ett riktigt elitämne som bara ett fåtal kan förstå sig på. Jag minns doktoranderna som undervisade, för dem var det inga problem att förstå men så fort man frågade dem vad det som de nyss bevist var bra för så såg de ganska oförtående ut. För dem var matematiken vacker och underbar ungefär som en operaälskare kan uppskatta sin Aida.

Med vänlig hälsning,
Peter Nordberg

Intervju med Peter Nordberg

Ulf Persson: Först skulle du vilja positionera dig själv lite precisare i tiden så att vi vet vilka referensramar som gäller. Matematikundervisning och attityder till denna har förändrats en del under de sista decennierna.

Peter Nordberg: *Jag är född 1956, och slutade gymnasiet 1976 sedan så gjorde jag militärtjänst under 1 år under studietiden på KTH och gick ut 1982.*

UP: Med matematiken kommer man i kontakt med tidigt. Hur var dina första kontakter med matematiken? Var den traumatisk hade du några svårigheter med att räkna? Hur var det med bråk, allmänna och decimalbråk? Eftersom du sökt en teknisk utbildning må matematik ha fallit naturligt för dig åtminstone i inledningsskedet. När började du känna dig främmande inför matematiken? När du kom till gymnasiet och för första gången konfronterades med lite mera abstrakt matematik?

PN: *I grundskolan hade jag inga större svårigheter så länge det inte var "lästal". Men så fort det blev abstrakt vilket det blev första gången i gymnasiet med en massa tecken så fick jag svårt att tolka matematik, jag hade helt enkelt svårt att förstå vad de olika tecknen innebar och hur de förhöll sig till varandra. Men jag har mycket lätt för huvudräkning och göra uppskattningar, typiskt ingenjörsbeteende.*

UP: I gymnasiet kom du i kontakt med fysik hur upplevde du detta? Ta t.ex. ellära som formellt sett är mycket matematiskt men som har mycket jordnära kopplingar. Var du förtrogen med elektriska kopplingar i apparater innan du studerade elläran mera teoretiskt? (Själv har jag aldrig lekt med elektriska apparater och kopplat sladdar.)

PN: *Fysik har alltid varit jättelätt för mig, där kan jag se "framför mig" vad som händer. Nej jag hade aldrig hållt på och kopplat elektriska apparater innan gymnasiet. Men däremot så har jag väldigt lätt att analysera och förstå elektriska kopplingar och applikationer.*

UP: Hur skulle du vilja beskriva din begåvning?

PN: *Jag har nog en väldigt ovanlig hjärna, jag vet att jag är mycket begåvad på vissa saker men direkt dålig på andra. Kanske utbildningsväsendet skulle bli ännu mer indivualiserat för att passa de olika begåvningarna som finns. Jag tror att jag har en annan medfödd begåvning, när jag gör test som mäter den spatiala förmågan brukar jag nästan alltid ha alla rätt. Jag har en förmåga att se samband och abstrakta och kompexa frågeställningar som en inre syn.*

UP: Även om du inte i detalj har beskrivit det du sysslar med så verkar det ganska självklart att det är mycket besläktat med matematiken i fråga om intrikata logiska resonemengskedjor och en övergripande intuition. Du beskriver att när du fick klart för dig vad det rörde sig om föll allting på plats. Någon liknande 'aha-upplevelse' har du aldrig upplevt i matematiken?

PN: *Nej, jag har aldrig fått den där känslan att allt klarnar i matematik som jag fått många gånger när det handlar om fysik, elära, elektronik, antenner osv. Matematiken var bara ett enda stort och svårt ämne som jag aldrig förstod mig på.*

UP: Jag skulle misstänka att den grundläggande strukturen med vad du sysslat med har anlagts av matematiker eller snarare matematiskt verserade ingenjörer. Du tar upp att många matematiska begrepp förstod du först när du såg dem tillämpade i ett sammanhang du direkt och naturligt kunde relatera till. Kan du ge några exempel.

PN: *Nu är det ett tag sen men fouriertransformen kunde jag förstå "baklänges" när jag studerade elektriska kretsar som filter, och man går mellan frekvensplanet och tidsplanet. Vektoranalysen kunde jag klara när jag läst teoretisk elektroteknik med rot, grad och div. Då först förstod jag vad det var. Matematisk statistik, stokastiska variabler, förstod jag efter att jag läst signalteori på TTT. Jag skulle kunna råkna upp många fler exempel.*

UP: Kommer du ihåg exempel på matematik du aldrig blev riktigt klok på och som du upplevde du aldrig hade någon användning för. (Det kan av uppenbara skäl vara svårt att komma ihåg, men om du skulle bläddra i din sons matteböcker kanske du skulle komma på något eller har du dina egna kvar?)

PN: *Jag har faktiskt försökt titta i min sons matteböcker från KTH och jag blir lika förvirrad fortfarande. Däremot så hade han en inlämninguppgift idag i Fysik med 3 ihopkopplade antenner med olika avstånd emellan dem. Den löste jag direkt, sonen hade gjort rätt. Ja den absolut värsta kursen var något som hette Funktionsteori fortsättningskurs, där fanns det begrepp som hyggliga och goda funktioner, burrrr. Jag har faktiskt sparat den boken och visat Mathias att han slipper den kursen numera. Den föreläsare/assistent jag hade då som "räddade" mig genom den kursen heter Franz Cech. Det roliga är att fortfarande undervisar på KTH och min son tycker han är lika bra som jag tyckte.*

UP: Skulle du kunna beskriva detta problem med antenner och radiosignaler lite mera explicit?

PN: *Jag ser dem helt enkelt framför mig när de färdas genom luften in i antennen, sen till kabeln, vidare till mottagaren, till avkodaren, etc etc tills signalen är framme som en nyttosignal i datorn eller mobilen. Jag kan se hela kommunikationssystemet som en inre syn och snabbt dra slusatser hur det fungerar och av det se vad som behöver göras. Men om du skulle be mig ställa upp allt det som sker matematiskt skulle jag vara helt ställd.*

Exemplet som min son visade mig var tre antenner som inbördes tog emot samma plana våg men de var förskjutna i sidled med avstånder b och vågen kom in med vinkeln a. Jag ser direkt framför mig fasförskjutningen mellan de tre antennerna som med lika långa kablar matar en mixer och där adderas de tre signalerna. Man skulle räkna ut hur effektivvärdet på spänningen blev vid mixern. Jag bara ser framför mig hur det fungerar. Jag kan inte förklara det hela. Självklart så kunde jag skriva upp det här i ett matematiskt samband när jag gick på KTH. Men jag ställde alltid upp matematiken efter att jag förstått hur det hela fungerade. Idag skulle jag inte kunna göra det om jag inte fick en duvning i matematik igen : -)

UP: Kan du anföra exempel på matematik som du verkligen hade nytta av?

PN: *Nej tyvärr inte. Jag klarade matte kurserna tack vare envishet och att jag lärde mig en metod men jag förstod egentligen inte. Och alla mattekurser är ju de första 2 åren på KTH. De mattekurser som jag klarade efter år 2 som resttentor var vektoranalys med betyg 4, matematisk statistik del 2 med betyg 4 och Funktionteori Fortsättningskure med betyg 3, förstår än idag inte hur jag kunde klara den kursen : -) För den kursen fanns det inget tillämpad ämne som gjorde att jag kunde förstå den matten bakänges.*

Det är så det fungerar för mig, av matematiken på KTH lärde mig inget som jag upplevde det. Det var bara en plåga, tyvärr. Men så fort det blev verkliga case även om det var abstrakta så kunde jag direkt förstå logiken och resonemanget samt dra egna slusatser.

UP: Men du måste väl ändå erkänna att matematiken finns i din verksamhet?

PN: *Vi har bl a ett "verktyg" inom radioplanering som bygger på mycket anvancerad matematik. Det räknar ut signalstyrkan och kvaliteten för ett mobilsamtal eller mobildata överföring på meternivå tredimensionellt. Det bygger på vågutbredning, sannolikhetslära, vektoranalys etc etc. Så matematiken är alltid närvarande i mitt arbete fast det är avancerade datorprogram som utför beräkningarna. Som du förstår så är jag kluven inför matematiken, jag vet att den behövs men jag hade oerhört svårt att förstå den innan det fanns något att tillämpa den på. Kan det vara så att det behövs ett annat utbildningssätt, att de studenter som har lättare att tillämpa matematik när man ser vad matematiken gör för nytta inom naturvetenskapen? Men jag håller helt med om att det är helt fel att lösa ett teknisk problem bara för att man lyckades hitta rätt formel. När jag studerade och även nu i arbetslivet vill jag förstå hur tekniken och naturen fungerar, jag vill alltid förstå principen, sen är det jätte-enkelt. Jag tror att inom matematiken lyckas jag aldrig riktigt förstå principen, lite grann som grammatik i språk, det finns alltid något specialfall. Men inom de tillämpade ämnena så finns det bara en princip, och förstår man den så hittar man alltid lösningen.*

UP: Du har nämnt din son, skulle du vilja berätta närmare?

PN: *Min son Mathias går andra året på Elektro KTH, han upplever precis samma svårigheter som jag gjorde för drygt 30 år sen. Det är väl därför jag blev så engagerad i den här debatten, ty jag får samma ångest för hans tentamens misslyckande som jag hade. Han pluggar och pluggar matematik men det vill sig inte riktigt. Jag känner precis igen det där, men jag säger till honom att kämpa på, jag kan i alla fall trösta honom med att man kan bli en framgångsrik civilingenjör utan att vara en fantom på avancerad matematik. Jag kommer från en mycket enkel bakgrund utan några akademiska traditioner, mina pappa var fiskare och min mamma var bankkassörska. Jag fattar inte än idag att jag lyckades överleva de första åren på KTH, det var mycket tufft. Tack och lov så vände allt när jag började läsa de tillämpade ämnena, då kom matematiken bakvägen.....*

UP: Hur står det till med din matematiska allmänbildning? Om jag gav dig följande frågor vad skulle du kunna svara på? (Eller skulle du finna frågorna förolämpande enkla?) Om du är förolämpad eller intimiderad kan du hoppa över dessa.
(*se den bifogade listan i slutet av artikeln*)

PN: *Haha, jag skulle kanske ha 6-7 rätt.*

UP: När du skummade igenom dessa frågor upplevde du ett obehag? Fanns det några frågor som var intressantare än de andra Några som väckte nyfikenhet Fanns det något som hade någon beröring med din verksamhet.

PN: *Exakt, jag kände genast ett obehag när jag såg frågorna. Jag kan inte associera till något eller känna att jag kan intuitivt lösa frågan. Den enda frågan som jag skulle kunna lösa med resonemang och som intresserade mig är frågan om Gelileo. Det känns som om jag ska lösa ett matematiskt problem så ska jag lärt mig det utantill. Â*

UP: Vilken matematik i din egen bedömning är den mest avancerade som du behärskar och som följaktligen har relevans i din verksamhet.

PN: *Ekonomisk matematik, simpel huvudräkning, att göra rätt antaganden. Jag arbetar i en verksamhet där vi har kostnader (OPEX) i miljardklassen per år samt investeringar (CAPEX) i mångmiljardklassen per år. Sedan den 1: a januari har jag blivit befodrad till chef för Telias radionätsplanering i Sverige, Norge och Danmark. Som chef för den verksamheten så ansvarar jag för strategier, att vi planerar och bygger 2G, 3G och 4G radionäten så att kunderna får bästa möjliga talkvalitet/mobil data kvalitet och att vi har lägsta möjliga kostnad. Min chef är civilingenjör från KTH, vi är 4 chefer under honom jag (civ.ing), en finändare (civ.ing), en littauer (civ.ing) och en svensk till som inte är civ ing. Av mina tre landschefer är 2 civ.ing.*

Jag var även projektledare för världens första 4G-nät som vi lanserade *i Stockholm den 14 december 2009. Under det projektet arbetade jag med Ericssons ingenjörer. Telia och Ericsson utvecklade systemet och det är enormt avancerad radioteknik, kodteori, digitalteknik etc etc, där förstår jag allt och ser hur det fungerar "framför mig". Jag har även mycket lätt att se de ekonomiska konsekvenserna.*

UP: Jag tackar för din medverkan.

Kommentarer

Jag inbjuder läsarna att fälla sin egna kommentarer och kanske formulera egna frågor att ställa till Peter Nordberg. Jag finner det hela mycket intressant och vill betona att det finns ingen anledning att betrakta det som en patologi och försöka på något sätt 'bota' Peter för att han skall uppleva lust och mening med matematiken. Det är inte en fråga om psykoanalys i vilken patienten lägges på schäslongen och via diverse associationer skall avlockas hemligheter som kan förklara dennes trauma, även om kanske anslaget i mina frågor har något av den karaktären. Men jag tycker att för didaktiskt inriktade kolleger vore detta ett mycket givande studiematerial för en djupintervju.

Vid närmare eftertanke kanske det hela inte är så underligt som det först kan tyckas. Schack och matematik hör ihop, åtminstone är detta en vanligt hävdad åsikt bland allmänheten, medan jag i själva verket misstänker att det föreligger en ganska låg korrelation, även om många av våra kolleger är skickliga shackspelare. Som extrema exempel kan anföras den tyske idealteoretikern Emanuel Lasker och holländaren Max Euwe vilka var världsmästare (se rutan sidan 69). Den intresserade kan konsultera Noam Elkies och Richard Stanley 'Chess and Mathematics'. Eller varför inte läsa Garry Kasparov **The Chess Master and the Computer** i senaste numret av *New York Review of Books* (Vol LVII, 2, February 11 2010).

Hur är det förresten med oss själva? Finns det delar av matematiken vi inte begriper alls? Givetvis, men på elementär nivå? Kanske inte, men för de flesta av oss ligger vissa områden betydligt bättre till än andra, även om en relativt hög korrelation av kompetens gäller mellan olika ämnen.

- Definition av ett primtal och räkna upp säg det förstahalvdussinet
- Redogöra för Pythagoras sats
- Lösa en andragradsekvation
- Multiplicera två komplexa tal
- Lösa differential ekvationen $f'(x) = af(x)$ (a en konstant t.ex. 1) och redogöra för vad den har att göra med exponentiell tillväxt.
- Multiplicera två matriser säg

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Lösa ett linjärt ekvationssystem säg med två obekanta och två ekvationer
- Förenkla ett algebraiskt uttryck som säg

$$\frac{x(1-x^2)}{x^2(1+x)^2}$$

- Beräkna sannolikheten att om man kastar två tärningar blir summan av ögonen mellan fem och tio
- Beräkna den definita integralen av $1/x$ mellan $x = 1$ och $x = 2$
- Formulera Fermats sats
- Med hur många frihetsgrader har man att rotera en sfär
- Vad är en bisektris i en triangel
- Hur många hörn har en hyperkub i 4-dimensioner
- Formeln för arean av en cirkel och en sfär med radien R
- Beräkna volymen av en pyramid med höjden h och basytan A
- Om Galileo hoppar från tornet i Pisa (50 meter över marken) hur långt tid tar det innan han dråsar i backen. (Vi bortser från luftmotståndet)
- Vad är vinkelsumman i en triangel
- Vad är vinkelsumman i en sfärisk triangel
- Kan π skrivas exakt som ett bråk
- Kan kvadratroten ur två skrivas exakt som ett bråk
- Hur finner du kortaste vägen mellan två punkter på en sfär.
- Kan du förenkla det trigonometriska uttrycket $\sin^2 x + \cos^2 x$
- Kommer du ihåg additionsformeln för $\cos(x + y)$
- Vad får du om du adderar den oändliga serien $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$

Matematiker jag mött I

Gert Almkvist

Gert Almkvist: **Berkeley, 1970** © *George M. Bergman*

Inledning.

Här gör jag ett försök att berätta om de matematiker jag mött under mitt liv. Vissa har haft större betydelse för mig än andra. De har fått mig att ändra mina matematiska intressen. Jag tänker på Roos (homologisk algebra, kategoriteori), Fossum (K-teori, representationsteori, invariantteori), Berndt (analytisk talteori), Stanley (kombinatorik), Zeilberger (bevis med hjälp av dator), van Straten och Zudilin (Calabi-Yau-differentialekvationer). Vidare blev jag under början av 2000-talet (utan att träffa dem) inspirerad av japanerna Umemura och Okimoto att syssla med Painlevéekvationer.

Gymnasiet.

Hösten 1952 började jag på Tekniska Läroverket i Malmö (numera Pauliskolan). I matematik hade vi under första terminen Karl Greger, en österrikare. Han var nyutexaminerad från Lund. Han var den mest entusiastiske lärare jag träffat. Han överskred kursomfånget med råge. T.ex. berättade han om niopunktscirkeln. Han nästan hoppade och sade: Är det inte en vacker cirkel? Han fick mig att köpa två volymer Burkhardt: Funktionentheorie i ett antikvariat för 10:-. Tyvärr hade vi honom bara en termin. Jag träffade honom nästan 40 år senare vid ett Samfundsmöte i Luleå.

KTH.

1956 började jag på Teknisk Fysik på KTH. Jag var inneboende hos Johan Håstads farmor i Mörby. Samtidigt blev Bo Kjellberg professor i Matematik 2 (som inte tillhörde Teknisk Fysik). Av nyfikenhet gick jag på hans första föreläsning och satte mig längst fram. Kjellberg inledde med att skaka hand och presentera sig för alla som satt på första bänk: Kjellberg, Kjellberg,...Med sig hade han en stor hund, en schäfer, som gick runt bland eleverna. Följande historia var allmängods på KTH: Kjellberg föreläste om differentialekvationer, men hade kört fast. För att lätta på stämningen tog han ett exempel, men råkade i svårigheter även där. En elev skrev på en lapp: ”Läs på bättre nästa gång” och stack lappen i munnen på hunden. Den gick fram till husse, som läste upp vad som stod på lappen. Men Kjellberg fann sig och sade: Fan också, jag trodde det var lösningen på problemet.

Jag gick även på tvåans matematikkurser som förelästes av Göran Borg. Härvid jag lärde känna Lars Ingelstam, Bengt von Bahr, Magnus Giertz, etc. På tentamen i Differentialekvationer handlade sista (7:e) talet om Legendrepolynom och där hade jag inte fått helt rätt. Jag knackade på Borgs dörr och beklagade mig. Det saknas induktion, sade Borg. Jag frågade hur han själv hade gjort. Resultatet blev att jag fick alla rätt. Sedan läste jag också Funktionslära och Fortsättningskursen om Speciella Funktioner. Min första muntliga tentamen var på hela Titchmarshs bok för 7:a i Funktionslära. Så nog lärde jag känna Göran Borg på ett tidigt stadium. Borg hade en oerhörd respekt för sin handledare, Arne Beurling. Sålunda berättade han för mig att Beurling aldrig läste andras bevis. Det gick mycket fortare för honom att finna egna bevis.

Under vårterminen hade vi Hans Rådström som föreläsare i Flera variabler. Han uppträdde som en skådespelare och bugade sig då han gjort ett lyckat bevis. Jag föredrog Borgs mer sakliga föreläsningar. Senare blev jag god vän med Rådström. Han skrev tre intyg av varierande styrka (om en icke-existerande tenta) en gång då jag ville ha permission från en repmånad. Han brukade skryta med att han slagit ut Hörmander då han sökte den famösa laboraturen i Lund. Det var innan Hörmander disputerat och Rådström tillträdde aldrig tjänsten.

Då jag gick i trean blev jag anställd på halvtid som matematiker hos Arne Bjerhammar på institutionen för geodesi. Jag skulle ”lösa” Molodenskys integralekvation för gravitationen. Hans Riesel var också anställd för att skriva dataprogram. Han visade sig inte särskilt ofta och det tog ett halvår innan jag träffade honom. Det gick rykten om att han var den matematiker, som tjänade mest pengar av alla. Han hade otaliga jobb. Han berättade att han tränade att köra fort i rondellerna för att hinna med ännu fler jobb. Senare blev jag intervjuad av honom för ett arbete på Matematikmaskinnämnden i Wennergrenskrapan. Jag fick jobbet men tillträdde aldrig utan använde det som utpressning för att få ett doktorandstipendium på KTH.

I min klass fanns två som senare blev matematiker, Bo Stenström och Olof Widlund. Jag laborerade Fysik tillsammans med Widlund. Till slut hade vi bara ”Röntgenlabben” kvar innan vi skulle få vår Civilingenjörsexamen. Den var väsentligen omöjlig att göra och även vi beslutade att förfalska mätvärdena. Stenström åkte ett år till Princeton där han lärde sig en mängd matematik, som låg långt från det som dominerade KTH. Han och jag gick på diverse föreläsningar på Stockholms Högskola på Kungstensgatan. Där fanns en annan skånsk professor (Borg var från Tormestorp nära Hässleholm), Otto Frostman från Munkarp utanför Höör. Men det var Olof Hanners föreläsningar i Algebraisk Topologi som intresserade oss. De gick över tre terminer och sista terminen var vi de enda åhörarna. Vidare hörde vi på Christer Lechs föreläsningar om Gruppteori och Kommutativa Ringar. Senare gick vi på Hörmanders föreläsningar om Flera komplexa variabler. Det fanns ett kort moment, då det handlade om Noetherska ringar, då vi kunde mer än Hörmander men han lärde sig oerhört snabbt.

I trean började jag också undervisa. Första gruppen var Arkitekter, men i fyran fick jag Teknisk Fysik. Det var så nära himmelriket man kunde komma som pedagog. Låt mig nämna några namn: Henrik Eriksson, Gerd Sjöstrand, Olav Kallenberg, Anders Martin-Löf, Bertil Storåkers, Johan Masreliez (omstridd kosmolog),...För några år sedan diskuterade Henrik och jag vad det blivit av hans klasskamrater. Vi fann en som misslyckats akademiskt, Gunnar Bergvall. Han blev bara chef för TV4. Undervisningen gick till på följande sätt: Vi räknade uppgifterna i den tuffa exempelsamlingen och alla gick fram i tur och ordning. För att göra det hela sportsligt var jag också helt oförberedd. En gång körde vi fast och eleverna såg Rådström komma för inspektion (det var glasväggar mellan salarna). Solidariskt varnade de mig och vi suddade ut och tog ett annat problem.

1960 blev jag civilingenjör och började licentiatstudier för Borg. Jag skulle generalisera ett resultat av honom till Hilbertrum. Det blev två artiklar där jag hade hjälp av Ingelstam att formulera ett resultat riktigt allmänt i den ene. Men mitt hjärta stod till algebran. 1962 fick Milnor (och Hörmander) Fieldsmedaljen vid Kongressen i Stockholm. Ungefär vid samma tid gjorde Jan-Erik Roos militärtjänst på FOA. Han höll en serie föreläsningar om Milnors resultat. Vidare hade han skrivit ett kompendium i Homologisk Algebra som vi lusläste. Förutom Stenström anslöt sig snart Henrik Eriksson till våra ”Babyseminarier”. Borg kallade oss för den ”Topologiska Gruppen” (pun intended?). Vår gud var Grothendieck, Roos var hans apostel i Sverige och de blå böckerna (EGA) var vår bibel. Senare anslöt sig Anders Karlqvist till gruppen.

Det kom en del gäster till Stockholm. Ofta fick jag skjutsa dem runt i min röda tvåtaktssaab. Jag minns en broder Selberg (inte Atle) från Trondheim. Richard Bellman talade bara om Kubakrisen. Diliberto och Henry Helson från Berkeley och Jack Ceder från Santa Barbara var minst en termin i Stockholm. Under konferensen 1962 inkvarterade jag flera deltagare i Kallhäll (folk var på semester). Jag minns en amerikan som på kvällen gick till Pressbyrån för att köpa en flaska whisky. Mumford, som då såg ut som en gymnasist, introducerades av den åldrige van der Waerden. Jan-Erik Roos gav Eilenberg ett exemplar av sitt föredrag innan han började. Kungen delade ut Fieldsmedaljerna och Gårding talade om Hörmanders forskning. Jag blev hembjuden till Borg, där jag förvånades över Edwin Hewitts språkkunskaper. Han talade utmärkt ryska.

En gång ringde telefonen då jag var ensam på institutionen. Norbert Wiener hade dött av en hjärtattack vid ett besök på Fants språklaboratorium och nu ville de att jag skulle ta hand om liket. Jag ringde Frostman och Hörmander men ingen var hemma. Det slutade med att amerikanska ambassaden ryckte in.

Det förekom flera disputationer på KTH. Professorn i Teoretisk Elektroteknik, Erik Hallén, var Teknis skräck. Han hade en elev, Per-Olof Brundell, sedermera professor på LTH. Vi kände Per-Olof väl, dels som övningsassistent, dels som fanatisk schack- och bridgespelare. Så vi gick alla på hans disputation. Vem var opponent? Jo, Hallén själv! Det fanns visserligen en professor på Chalmers, men han använde fel beteckning för magnetisk fältstyrka, så honom kunde man inte lita på. Disputationen pågick i flera timmar och vi fruktade att Per-Olof inte skulle bli godkänd. Så stor var skräcken för Hallén.

Edgar Asplund hade varit både i Berkeley och Princeton i flera år. Han var elev till Beurling. Han disputerade på en funktionsklass som Beurling hade hittat på. Kvällen före disputationen fick Edgar kalla fötter. Han befarade att klassen bara bestod av nollfunktionen. Med stort besvär konstruerade vi ett exempel som inte var identiskt noll. Lennart Carleson var opponent. Han visade att det var snarare tvärt om. De flesta satser gällde i L^1. Senare skrev Asplund och Carleson en gemensam artikel. Vid disputationsmiddagen höll Asplund tal på fyra språk, varav ett var finska.

Lars Ingelstam var ett år vid Yale och kom hem med en avhandling om reella Banachalgebror. Försteopponent var Yngve Domar och jag blev andreopponent. Jag åkte upp till Uppsala för att fördela oppositionen med Domar. Han bestämde att vi skulle ha frack med svart väst. Jag fick chansen att berätta litet om den historiska bakgrunden, där kvaternioner och Cayleytal ingick. Magnus Giertz var tredjeopponent där han lyckades förväxla algebror med algerier.

En annan förgrundsfigur på KTH var Bengt-Joel Andersson, professor i Mekanik. Han kallades för ”Liket” av någon anledning, som jag aldrig lyckades lura ut. Han höll utmärkta föreläsningar i hydromekanik där man fick lära sig beräkna flöden med hjälp av konforma avbildningar. Han kunde en massa matematik och skröt med att han innehade världsrekordet för en viss konstant i komplex analys. Han var en passionerad bilförare i en Lancia. Senare övergick han till privatflygplan.

Berkeley 1964-66.

Asplund hade talat om Berkeley som ett akademiskt paradis. Jag skrev till Helson och han ordnade så att jag blev antagen som ”graduate student” och dessutom fick arbete som ”research assistent”. Jag fick också Amerikastiftelsens stipendium och Fulbright betalade resan. Det fanns 350 doktorander i matematik i Berkeley och utbudet av kurser var enormt. Lärarkåren var imponerande och under sommaren utökades den med folk från östra USA, som flydde från värmen och fuktigheten. Sålunda blev jag redan första veckan inbjuden på party hos Milnor och där satt Kaplansky vid pianot och spelade jazz.

Helson hjälpte oss att hitta en bostad. Jag fick ett litet skrivbord i rum 101 i Evans Hall. Vi var elva doktorander i detta rum. Per Holm från Oslo hjälpte Ed Spanier med att skriva boken om algebraisk topologi. Den smartaste var nog Nancy Kopell, elev till Smale. Hon fick senare MacArthurpriset. Jag lärde snart känna Mike Shub och David Frank från New York. De hade kört Steve Smales bil över kontinenten. Smale hade köpt ett stort hus uppe på kullarna och vi blev snart ditbjudna. Senare blev Smale en fanatisk kristallsamlare och byggde till ett stort rum för sina kristaller. Han och hans fru gav ut en bok med foton av kristallerna.

Jag gick på Max Rosenlichts föreläsningar i Algebraisk Geometri. Han hade en assistent, Peter Russell, som trots namnet var tysk. Han hamnade så småningom i Montreal på McGill University. Han har redigerat en av Abhyankars få läsbara skrifter. Enligt Peter åstadkoms detta genom att förhindra Abhyankar att läsa sista versionen. Ibland gick jag på Cherns föreläsningar i Differentialgeometri. Lance Small föreläste om (icke-kommutativ) Ringteori. Han var republikan och flyttade snart till San Diego. Där hade han en elev som senare gifte sig med Smalls handledare i Chicago, Herstein.

Hösten 1964 började studentupproret i Berkeley. Det kallades FSM, the Free Speech Movement. Kontroversen handlade om att få hålla politiska möten på universitetets område, Campus. Det hela urartade då en administrationsbyggnad ockuperades och sherifferna från Alameda County inkallades. Mitt i natten arresterades 800 studenter som fördes till Santa Rita Prison Farm. Den vanligaste anklagelsen var det motsägelsefulla ”resisting arrest”. Mike Shub var en av de arresterade. Han löstes ut av Smale som var känd för att gå omkring med 2000 dollar i sedlar för att betala ”bail” för sina studenter. Efter en omröstning i lärarkollegiet vann FSM en överlägsen seger.

Våren 1965 överflyttades intresset till Vietnamkriget. En ”Vietnam Day Committee” bildades med matematikerna Smale och Hirsch som ledare och yuppien Jerry Rubin som kassör. Soldater och vapen skeppades från hamnen i Oakland. Järnvägen dit gick genom Berkeley och Smale och hans studenter låg bokstavligen på spåren för att stoppa tågen. Under Vietnamdagen med-verkade många kändisar, t.ex. sångaren Phil Ochs och författaren Norman Mailer. Mailers tal direktsändes i den lokala radion KPFA (där matematikern Richard Dudley ibland läste nyheterna), men sändningen fick avbrytas då han använde för många ”4-letter words”. En bandad version sändes senare med ett otal pip.

USA:s FN-ambassadör Goldberg blev 1965 hedersdoktor i Berkeley. Ceremonin skedde i Greek Theater, en amfiteater med plats för 15000. Alla närvarande, utom några fotbollsspelare längst fram, hade stora plakat med ”No degree for war”. På scenen satt ett antal professorer iklädda akademiska mantlar. Två av dessa hade också plakat, matematikerna Moe Hirsch och Dick Dudley.

I rum 101 fanns också Steve Salaff. Det gick rykten om att han var kommunist och han hade varit i England. Han var alltid lite spydig mot mig och vår ljumma socialism i Sverige. Under juluppehållet var vi en gång ensamma och då berättade han att han samlade in pengar för att sätta in annonser mot Vietnamkriget. Han hade en lista med bidragsgivare och den vågade han inte ha hemma ty han var rädd att FBI skulle raida hans lägenhet. Så jag fick listan och förvarade den tills jag kunde ge den till Jerry Rubin. Senare fick jag ett hotelsebrev från ”The Minute Men”, en militant organisation på högerkanten. De påstod att jag gjort ”unpatriotic statements”. Steve var elev till Heinz Otto Cordes och blev färdig sommaren 1965. Drygt 40 år senare utkom en elementär bok om differentialekvationer av S.Salaff och S-T.Yau (Fieldsmedaljör och Crafoordpristagare). Jag lyckades hitta Steve på internet. Han är numera journalist i Toronto. Men efter examen hade han undervisat på ett college i Hong-Kong (hans fru studerade kinesiska). Där hade han en mycket begåvad elev, S-T.Yau. Jag träffade Yau i Lund för ett par år sedan i samband med ett Crafoordjubileum. Han blev doktor i Berkeley 1972 så vi var där samtidigt men jag hade aldrig honom som elev.

Dennis Sjerfe var norskättling. Han gav privatlektioner till den svenske nationalekonomen Bo Södersten. När Södersten kom hem kunde han för att imponera på sina kolleger skriva att derivatan var positiv i stället för att säga att något växte. Drygt 30 år senare träffade jag Dennis på UBC i Vancouver. En annan nationalekonom, som jag umgicks med, var Karl Vind från Köpenhamn. Han var matematiskt bildad och hade t.o.m. läst Algebraisk Topologi.

Jag umgicks också med några sydamerikaner. Jacob Palis från Brasilien blev så småningom ordförande i IMU. Bravo-Flores från Chile hade en hög ställning under Allende men fick fly till USA efter kuppen 1973.

Det kom många gäster till Berkeley. En var Serge Lang, som stannade ett helt år och delade rum med Smale. I postrummet fanns en skrivmaskin som flitigt utnyttjades av Lang. Det maskingevärslika smattret var av samma art som det som hördes från Hörmanders rum då han skrev sina fyra volymer om PDE. Lang var alltid involverad i någon kontrovers. André Weil höll föredrag och Lang satt på första bänk och protesterade mot allt. I början grälade de på engelska men snart gick de över till franska. Senare då Wiles hade bevisat Fermats Sista Sats så förde Lang en kampanj mot att ha med Weils namn i Taniyama-Shimuras förmodan. Om man syndade mot detta fick man omedelbart ett paket med fem kilo handlingar från Lang.

Richard Mateosian satt också i 101. Han var elev till John Rhodes som sysslade med semigrupper. Han var en mycket entusiastisk föreläsare med en oläslig handstil. Han hade en firma, The Krohn-Rhodes Institute nere på University Avenue där han anställde doktorander. Man hade lyckats få kontrakt från US Airforce. Krohn bodde i Washington och arbetade som lobbyist. Långt senare fick jag reda på följande: Rhodes (MIT) och Krohn (Harvard) hade samma doktorsavhandling! Men de hade otur. Någon upptäckte detta men den fräcke Rhodes sade: Denna avhandling är värd fem avhandlingar och vi vill bara ha två. De blev båda godkända. Då jag 1970 kom tillbaka till Berkeley mötte jag Mateosian. Krohn-Rhodesinstitutet hade gått i konkurs och doktoranderna sparkats. Själv hade han blivit doktor för Hochschild som var känd för att säga ”I do not mind writing the thesis but I hate to explain it for them”. Rhodes hade blivit ”Full Professor”, och var miljöaktivist med ”ban cars on campus”. Ytterligare ett 10-tal år senare berättar någon från Berkeley att Rhodes var fastighetsmäklare i San Diego. Ett typiskt exempel på ”the American dream”.

I januari 1965 läste jag Pierre Gabriels doktorsavhandling om icke-kommutativa kvotringar. Jag generaliserade det mesta till kategorier och det blev min doktorsavhandling. Handledare blev Gerhard Hochschild, som inte var det minsta intresserad av kategorier. En gång stod vi i biblioteket och tittade i förordet till en diger bok om algebraiska grupper av två fransmän (Demazure-Gabriel). Där började man med att definiera två universa. Detta tyckte Hochschild var barockt. Själv skrev han en liten tunn bok om algebraiska grupper. Det fanns emellertid fler hinder innan man fick sin Ph.D. Ett var deltagande i ett seminarium i ett ämne utanför avhandlingsämnet. Det visade sig att Diliberto, som jag kände från KTH, hade ett seminarium i ordinära differentialekvationer. Jag visade honom mina två artiklar och vi kom överens om att jag bara behövde hålla två föredrag om dessa.

Värre var den s.k. ”Qualifying exam”. Den bestod av tre ämnen Algebra, Analys och Geometri. I varje ämne hade man två examinatorer som turades om att fråga under en timme. Jag har glömt en del namn men minns följande. I Algebra ställde Seidenberg en störtskur av frågor. Så snart jag visade antydan att jag kunde svara, avbröt han mig och ställde nästa fråga. Det gick ganska bra. I Analys började Bremermann med att fråga om Osgoods sats, som jag aldrig hade hört talas om. Det gick knaggligt men till sist blev jag godkänd. Men det värsta återstod, Geometri. Där skulle jag ha Spanier men lyckligtvis var han bortrest och ersattes av en analytiker, Jacob Feldman. Han ställde en lurig fråga om ett patologiskt topologiskt rum, men den var allmängods bland doktorander. Vidare hade jag Taub, som höll på med relativitetsteori. Hans dotter gifte sig senare med min labbkompis

Olof Widlund. Efter lyckad tentamen firade jag på Val's Pizza på Euclide Avenue med Ludwig Khatchatooriantz, en armenier som hade varit musiker och kunde skriva sitt namn med fyra olika alfabet.

Sommaren 1966 var min avhandling färdig. Den blev granskad av Glenn Bredon och någon utanför institutionen och blev godkänd. Sedan var det bara att vänta på diplomet skulle undertecknas av Californias guvernör, Ed Brown (far till Jerry som också blev guvernör). Jag missade Ronald Reagans signatur med tre månader.

KTH 1966-67.

Tillbaka i Stockholm fick jag vikariera på ett lektorat. På vårterminen undervisade jag i Speciella funktioner och hade en mycket trogen åhörare, Leo Ullemar. Den som känner till maktstrukturen på Matematik 2, vet varför. Henrik Eriksson skrev en lic-avhandling för mig, "Fraktionskategorier och Grothendiecktopologier". Officiellt stod Borg som handledare.

På Roos initiativ startade vi nordiska konferenser i Algebra. Den första var i Lund. Där träffade jag Robert Fossum och Arnfinn Laudal från Oslo och flera danskar, t.ex. Christian U.Jensen. Nästa möte var i Köpenhamn och där var Christer Lech och Henrik med. På båten diskuterade vi vad man skulle kalla ettan i en ring på engelska, "unit" betyder ju inverterbart element. Vi kom överens om att "one-element" vore bäst. Sedan inledde Lech sitt föredrag med "In this talk we assume that all rings have one element" och möttes av gapskratt.

På våren 1966 blev sex lektorat lediga. Jag sökte och fick alla sex. Valet stod mellan KTH och Lund. Gårding skulle hålla föredrag i Uppsala, så Stenström och jag åkte dit för att se om han motsvarade sitt rykte. Jag tyckte inte han verkade så farlig så jag beslöt att flytta till Lund. Men huvudskälet var att Roos fanns där.

Lund

Under våren 1966 hade jag skickat in min avhandling till Arkiv för Matem. Senare fick jag veta att Gårding var redaktör och Roos blev inkallad: Vad är det för skit? Roos förklarade en del och sade sedan; Han kommer också hit. Gårding: Kommer den djävulen hit också! Skall han skriva fler såna pekoral? Så starten var inte så lysande. Men jag hade inte tid att bekymra mig Jag undervisade 12-14 timmar i veckan och hade dessutom en kvällskurs på TBV i Malmö.

I Linköping byggdes en Teknisk Högskola med små rum där eleverna skulle sitta och titta på TV. Idén var att spara in läraren. TRU (Television och Radio i Utbildningen) i Stocksund fick i uppdrag att producera TV-program. Eskil Block, som hade studerat i Lund, var någon sorts chef för rekryteringen av folk till inspelningen. Han satt på KTH vid ett litet bord med fem telefoner och han talade i alla fem på en gång. Kontentan blev att Arne Persson och jag skulle göra det allra första programmet i Linjär Algebra. Vi förhandlade med TRU:s chef, Lars Ag. Vi lyckades få 2400:- per halvtimmesprogram. Då vi förhandlat färdigt anlände SACO:s representanter (en var Inge Brink). De hade tänkt starta med ett bud på 1500:-.

Vi fick bara betalt för färdiga program och hela höstterminen gick utan att vi lyckades göra ett enda program.Vi hade bl.a. Arne Arnbom (känd från Sten Bromans musikfrågeprogram) som producent. Allting krånglade, ljussättningen tog timmar och ändå blev det skuggor av våra pilar som inte skulle vara där. Om inte annat så blev vi avbrutna av Eskil Block som blandade sig i det matematiska innehållet. Lars Ag tyckte att vi skulle ha bikinibrudar som visade plakat med formler. Men vi lyckades göra kursen färdig under vårterminen.

Carl Hylthén-Cavallius (Hylta-Kalle) hade med Lennart Sandgren skrivit en utmärkt bok i Analys i två band. Den skrevs om flera gånger för att anpassas till flumpedagogiken och blev allt sämre. Till sist avskaffades den, då den ansågs vara för svår. Jag blev snart hembjuden till Kalle tillsammans med den blivande landshövdingen och ett par museichefer. Kalle gillade inte att man skämtade med matematiken. Han brukade gå ut då man sjöng en viss visa om derivatan på institutionens fester. Jag hade en kurs i Matematikens Historia (en poäng, det var på snuttuniversitetets tid). Eleverna ville ha en provtenta och jag gjorde en som kanske var något utanför det strikt akademiska (jag minns en fråga: Vad finns på vinden i Göttingen? Svar: Konstruktionen av 65537-hörningen med passare och linjal). Kalle blev sur för att jag inte hade undertecknat med mitt namn utan hela institutionen stod för innehållet.

Den 1:e maj 1968 åt jag lunch på Grands veranda med nationalekonomerna Bo Södersten och Ingmar Ståhl. De kom direkt från socialdemokraternas demonstrationståg. Båda blev med åren alltmera konservativa. Södersten bor numera i den landshövdingska friggeboden i Jönköping. En gång satt jag inklämd mellan Hörmander och Ståhl på flyget från Stockholm. De överträffade varandra i att skälla på regeringen. Senare var båda verksamma i Vetenskapsakademin som ledde till att John Nash fick Ekonomipriset.

Andra terminens kurs brukade avslutas med sannolikhetslära. För en utvald skara duktiga elever ersattes detta med representationsteori för ändliga grupper. Jag skrev ett litet kompendium efter delar av Serres bok. De som klarade den skriftliga tentan fick äran att tentera muntligt för Hörmander. Han blev överraskad av satsen att dimensionen av en irreducibel representation delar gruppens ordning. Den kände han inte till, men den finns ju inte för oändliga grupper. Peter Gärdenfors, filosofiprofessor känd från TV och radio, var en av dem som klarade tentan. Mitt kompendium utvidgades senare väsentligt av Torbjörn Tambour. Många år senare kom Hörmander och frågade om beteckningen $H \lhd G$ som Tambour använder för att H är en normal undergrupp i G, är standard? Jag svarade ja. ”Det måste vara i mycket elementära böcker, ty jag har inte sett det”, säger Hörmander.

En karaktär på institutionen var Jan Persson. Han hade jobbat som telegrafist på sjön och hade blivit ingenjör på Hermods (samtidigt som min estniske vän, Oscar Niit från Osby). Gårding hade handlett honom fram till en lic-examen, men sedan tyckte Gårding det var nog (förmodligen ogillade han Jans sjömansengelska). Men Jan forskade vidare och passade på att disputera då Gårding var i USA. Men Gårding hann hem och förhindrade att Jan blev docent. Jan skrev fler artiklar och ansökte igen. Nils Nilsson talade för Jan i fakulteten men det hjälpte inte. Senare trotsade Tord Ganelius nomenklaturan och gjorde Jan till docent i Göteborg. Jan var ett tag i Oslo och sökte sedan ett vikariat på LTH. Han hade 25 publicerade artiklar medan hans konkurrenter hade bara en lic-avhandling. Likväl satte Gårding, Hörmander och Peetre honom sist. Då ingrep Hylta-Kalle och alla lektorer skrev ett brev till fakulteten där vi satte Jan först. Han fick tjänsten men då hade han redan flyttat till Tromsö.

Jag blev snart vän med Tomas Claesson och KG Andersson. Vi spelade bordtennis i källaren. Hörmander hade fått Pleijels tjänst och väntades komma hösten 1968. Förväntningarna var enorma. Tomas och KG trodde att han t.om. skulle slå mig i bordtennis (vilket de själva inte klarade av). I början märktes Hörmander mest då Gårding höll föredrag, då alla fel omedelbart korrigerades. Hösten 1969 kom Hans Duistermaat från Utrecht för ett helt år. Efter ett par månader talade han felfri svenska. Han var en utmärkt bordtennis- och schackspelare. Han höll en serie föredrag om ordinära differentialekvationer och skrev en artikel ihop med Hörmander.

I Bourbaki finns följande problem: Låt M vara en $2\times 2-$matris med koefficienter i en kommutativ ring (med 1) sådan att $M^2=0$ Visa att $Tr(M)^4=0$ och 4 är bästa möjliga potens. Det är fel, redan $Tr(M)^3=0$. Detta försökte jag generalisera till $n\times n-$matriser och godtyckliga potenser $M^{m+1}=0$. Då är $Tr(M)^{mn+1}=0$. Jag kunde visa detta för små m och n men inte i allmänhet.

Efter sista seminariet på våren brukade vi bli hembjudna till Gårding, så även 1970. Hörmander frågar mig om jag kommer att demonstrera då jag kommer till Berkeley. Jag säger att det är möjligt. Då uttalar han sitt stöd för dödsskjutningarna vid Kent State. Det var ju utegångsförbud så de får skylla sig själva. Vi blir chockade.

Berkeley 1970-71.

Våren 1970 ordnade Hörmander ett byte av jobb mellan Heinz-Otto Cordes i Berkeley och mig. Vi bytte dessutom hus. Det senare var inte utan komplikationer men i slutet av augusti flyttade vi in i 844 Oxford Str. Jag visade problemet ovan för Hochschild. Han sade att han brukade definiera $Tr(M)$ med hjälp av yttre potenser. Detta ledde att jag kunde bevisa formeln ovan på ett par rader och att jag kallades ”the guy who generalized a mistake in Bourbaki”. Zeilberger blev så förtjust i mitt bevis så han skrev en hel artikel om det (huvudsakligen bestående av fotnötter).

Moss Sweedler från Cornell var också i Berkeley ett helt år. Han höll föreläsningar om Hopfalgebror. Han såg ut som en hippie med skägg, långt hår och pannband. Dessutom körde han omkring i en gammal Pontiac som var målad i glada färger. Polisen i Berkeley lärde snart känna igen bilen och lät honom vara ifred. Annat var det utanför Berkeley. En gång åkte vi genom Petaluma ("Chicken capital of the world") och blev stoppade. Moss sade att han var matematikprofessor i Berkeley, vilket snarare förvärrade hans situation. Efter en timme blev vi släppta. På Cornell är Sweedler känd för att ha publicerat följande skrift: Boo Barkee: "Groebner bases. The ancient secret mystic power of the Algu Compubraicus. A revelation whose simplicity will make ladies swoon and grown men cry". Boo var hans hund, en bjässe på 80 kg, som en gång åt mina sandaler. Numera arbetar Moss för NSA (National Security Agency).

Inte långt från mig bodde Lars Lönnroth. Han var på Skandinaviska Institutionen. Han hade samlat in ett upprop mot Vietnamkriget bland sina studenter och skandinaver. Detta ville han publicera i "Västkusten", den enda överlevande skandinaviska tidningen i Californien. Men det vägrade chefredaktören, även att publicera det som en annons för 500 $. Ett par år tidigare hade Sven Delblanc bott i Lönnroths hus, då han skrev "Åsnebrygga".

På Campus fanns ett antal baracker. I T104 satt de yngre professorena på Institutionen. Jag lärde känna Mike Schlessinger och Jonathan Wahl. En annan Assistant Professor där, som jag glömt namnet på, deklarerade öppet att han inte tänkte forska utan bara intressera sig för undervisningen. Han blev snart sparkad (i Lund hade han väl fått löneförhöjning, det kommer mer om detta senare).

Bill Badé bodde i ett stort hus, 200 trappsteg upp från Rose Garden. Det var inte Hearst Castle, men näst intill, han hade köpt det av ägaren till San Francisco Chronicle. Bill hade assisterat vid skrivandet av Dunford-Schwartzs "Linear Operators", en bok som jag köpt 1961. Bill samarbetade med Kjeld Laursen i Köpenhamn och jag träffade honom senare i en av de lägenheter som Ørstedtinstitutet har i Nyhavn. Helson hade en vinpress och tillsammans med Badé gjordes mängder av vin varje år. När Bill var 11 år hjälpte han sin far vid utgrävningarna i Telf-en-Nasbeh. Hans far var arkeolog och vän till John Muir, grundaren av Sierra Club.

För att generalisera felet i Bourbaki till endomorfismer av moduler uppfann jag K-teori för kategorin av endomorfismer. Jag diskuterade möjligheten att finna alla invarianter för endomorfismer med Marvin Greenberg från Santa Cruz (en ny Campus av UC). Han ansåg det för omöjligt. Men några månader efter det att jag kommit tillbaka till Lund lyckades jag visa att för endomorfismer av ändligt genererade projektiva moduler är karakteristiska polynomet den enda additiva (över korta exakta sviter) invarianten. Det anser jag fortfarande vara mitt bästa resultat. Tidare hade Spanier och

Kelley visat samma sak då ringen var en kropp.

Lund igen.

Sommaren 1972 anordnades en tvåveckorskonferens om kommutativa ringar och algebraisk geometri i Århus. Där fanns Robert Fossum och Phil Griffith från Urbana, Lucien Szpiro (på motorcykel) och Jean-Louis Verdier från Paris, Franz Oort från Utrecht etc. Arnfinn Laudal hade en skrift om kategorier i Århus röda preprintserie. Man hade tryckt den utan att rita i pilarna i diagrammen, vilket gjorde den helt oläslig. Det var samtidigt som den famösa schackmatchen mellan Fischer och Spassky i Rejkavik. Jag träffade också danskarna Birger Iversen och Knud Lönsted. Efter konferensen åkte jag ofta till Köpenhamn där man varannan vecka hade ett seminarium i samma ämnen som konferensen. Flygbåten kostade bara 3.50 på den tiden.

1976 var jag för första gången i Oberwolfach. Ämnet var Algebraisk K-teori. Där träffade jag Dan Grayson, som nyss hade disputerat. Vid middagsbordet hamnade jag bredvid amerikanen Tony Bak från Bielefeld. Han verkade känna till mina artiklar och jag frågade honom varför. "You are the guy who generalized a mistake in Bourbaki" svarade han. Där var också holländarna Strooker och van der Kallen och nigerianen Kuku. Jag träffade också Keith Dennis, storsamlare av matematisk litteratur. Han kom till Sverige en gång, t.om. till Höör, enbart för att köpa böcker. På hans kontor på Cornell skymtades han mellan stackar av böcker.

Senare blev jag inbjuden till Kommutativ ringteori och Algebraisk geometri lett av Ernst Kunz från Regensburg. Men efter att jag hade besegrat honom både i bordtennis och schack slutade inbjudningarna att komma. I Oberwohlfach träffade jag Luchezar Avramov från Sofia. Han fann ett fel i en av mina artiklar om K-teori. Det var ett bevis, som bara fungerade för reguljära ringar. Det tog mig ett år och hjälp från Vasconcelos att rätta felet.

En gång då jag gick ensam i skogen utanför Oberwohlfach mötte jag en amerikan. Han frågade var jag kom från. Lund, sade jag. Känner du Almkvist, sade amerikanen, som visade sig vara Neal Sloane från Bell Labs. Vi hade brevväxlat om invarianter. Jag hade hållit på med invarianter i två år utan att känna till Moliens sats, som Sloane använde i kodningsteori. Jag hade börjat i karakteristik p och kommit till karakteristik noll genom att låta $p \to \infty$. Sloane har skrivit en tjock bok om packning av sfärer med John Conway. Han har också skrivit en bok om klätterturer i New Jersey.

Vi hade också en konferens i Tromsö i november så dagarna var korta. Jag bodde hos Jan Persson och stannade några dagar extra. Tillsammans med Ben Jonsen besteg jag Tromsdalstind i en snöstorm. Han skrev senare med sin fru en bok om svampgifter. Då jag steg på planet för att flyga tillbaka satt Laudal där. Han hade varit hemma i Kirkenäs. Med sig hade han en djupfryst ren. Jag hjälpte honom att bära de bloddrypande paketen på flygplatsen i Oslo.

Kurserna förändrades och vi skulle undervisa i Diskret Matematik. Det beslöts att vi först skulle förkovra oss själva i detta ämne. Det började med att Gårding föreläste om Grafteori. Han var väl förberedd och höll ett högt tempo. Hörmander antecknade och frågade efter definitioner av vissa begrepp. Definitioner, det har vi inte tid med!, fräste Gårding. I pausen lämnade Hörmander lokalen. Senare höll Hörmander ett lysande föredrag om den ändliga Fouriertransformationen (FFT). Det gick en historia bland eleverna att vid första föreläsningen var Gårding alltid väl förberedd och hann mycket långt. Nästa gång började han med att repetera det han gjorde första gången, men hann inte riktigt lika långt. Så fortsatte det under hela terminen (samma historia har berättats om Åke Pleijel).

I mitten av 70-talet började Fossum och jag att studera grupprepresentationer i karakteristik p. Han tillbringade ett år i Köpenhamn och då skrev vi en lång artikel, som så småningom blev Springer Lecture Notes Nr 641 (ett berömt primtal!). Där finns en sats som vi kallade ”The Valby Bodega Theorem” (Fossum påstår att han bevisade satsen där). Vi har fått frågan: ”Who the hell, is Valby Bodega?”. Vi grundlade ”The Institute of Algebraic Meditation” i Höör med devisen ”If you don't like your analyst, see your local algebraist”. Fossum visade sig vara en utmärkt snickare och gjorde en stor insats vid reparationen av institutet. Fossum åkte till Paris och jag blev inbjuden att hålla föredrag i Marie-Paule Malliavins Seminarium vid Paris VI. Fossum och jag gick till Serres bordtennisklubb i källaren på Parlamentet (man måste visa passet för att komma in). Tyvärr kom inte Serre den kvällen.

En höstdag 1978 promenerade Hylthén-Cavallius och jag ner mot centrum i Lund. Vi diskuterade Arthur Koestlers bok. ”The midwife toad”. Där beskrivs hur den österrikiske biologen Paul Kammerer blir avslöjad som fuskare och begår självmord. Ett par veckor senare begick Hylthén-Cavallius självmord. Ingen vet varför.

Richard Stanley kommer på besök. Jag möter honom vid flygbåten från Köpenhamn. Den naturliga frasen är: ”Doktor Stanley I presume”. Han är utan tvekan världens främste kombinatoriker och han har skrivit ett par fantastiska böcker ”Enumerative Combinatorics”, I, II. De innehåller övningar, som räcker ett par liv.

I mars 1980 åkte jag till New York. Jag var ”Visiting Scholar” på Columbia. Där träffade jag Hyman Bass och Dan Grayson. Det var tunnelbanestrejk under ett par veckor, Jag bodde i Greenwich Village så det var långt till Columbia. Jag fick låna en cykel av Gerson Levin, som var på Brooklyn College. Jag minns ett intressant föredrag av Barry Mazur från Harvard om elliptiska kurvor. Ray Hoobler, som också var elev till Hochschild, var på City College. Det var ett fel i hans avhandling, som det tog 15 år att reparera. Sweedler bjöd in mig till Cornell, där min tidigare elev Gudrun Brattström nu var doktorand. Bussen tillbaka till NY ankom sent på kvällen. Det var litet otäckt att promenera från 42:a till 10:e gatan med 500 $ i fickan.

Vi köpte en usel bil av en polsk slaktare på West Broadway och körde till Berkeley. Där träffade jag min handledare Hochschild.och Smale. Mike Shub arbetade på IBM så jag sade till Smale: De gamla radikalerna arbetar nu för storkapitalismen. Smale svarade: Jag jobbar ibland själv för IBM. Jag träffade för första gången George Bergman. Han hade alltid varit bortrest då jag var i Berkeley. Han hade ett sätt att bemöta analytiker: Are you an analyst. I am an oralist.

I augusti 1980 var det en konferens i Torun i Polen. Dieudonné, Lascoux och den kedjerökande och hostande Schützenberger kom från Frankrike. Där var ett helt gäng rumäner, Bădescu, Bărcănescu, Constantinescu och D.Popescu. De växlade till sig en massa złoty, som underligt nog var värda mer i Rumänien. Kurke från Berlin bjöd in mig till Humboldtuniversitetet. Vi besåg det gamla Torun. Vi hade en guide men han var helt överflödig, ty Dieudonné med Guide Bleu i handen dominerade föreställningen. Det mesta hade blivit förstört av svenskarna och alla såg på mig som ende svensk. Jag kontrade med att på den tiden var jag dansk. Fossum var också där. Jag delade rum med Andreas Nielsen från Århus. Baren var öppen till 1.00 och min uppgift var att få Andreas att lägga sig.

Därefter åkte jag för två månader till Sofia i Bulgarien. Jag möttes på flygplatsen av Avramov i hans fars Mercedes. På BAN (Bulgariska Vetenskapsakademin) träffade jag två östtyskar, Rüdiger Achilles och Bernd Herzog. Den senare hälsade mig med. "Ich bin der ostdeutsche Herzog". Det finns en västtysk också, Jürgen Herzog, som jag kände från Oberwolfach. Liksom Oslo har Holmenkollen, som kan nås med spårvagn, så har Sofia berget Vitosha, som är högre än Kebnekaise. Snart besteg vi alla detta berg. Sedan började allvaret. Jag höll en serie föreläsningar om invariantteori efter Herman Weyl och ett kompendium av Rota. I det senare saknades ofta bevis och "the references are too obvious to be mentioned". Jag fick mycket hjälp av Avramov. Majoriteten av åhörare var kvinnor. På universitetet träffade jag Sendov, vars förmodan senare sysselsatte Julius Borcea i flera år. Jag blev hembjuden till Vasil Popov, som samarbetade med Peetre.

På föreläsningar i Sofia förekom ofta förkortningen ТГВ (alltså TGV, snabbtåg i Frankrike?). Jag frågade vad det betydde. "Teorema Germana Vejla of course" blev svaret. Många höll på med Liealgebror, men institutionens verkliga stjärna (förutom Avramov) var Veselin Drenski, som arbetade med algebror satisfierande polynomidentiteter. Nästan alla hade blivit doktor vid Moskvauniversitetet. Det ryska inflytandet var stort. En typisk bulgarisk vits var följande. Varför kostar Rudi Pravo fyra stotinki medan Pravda bara två? Svar: Två stotinki för översättningen.

Från Sofia tog jag tåget till Bukarest. Jag gjorde ett uppehåll för att se Velike Tarnovo, den gamla huvudstaden. Jag har en inbjudan från Zoia Ceauşescu, diktatorns dotter, som är chef för Increst. Bukarest är en märklig stad, Balkans Paris, som är nästan helt nedsläckt på kvällarna. Jag blir hembjuden men då grannen ringer på, får jag gömma mig, ty det är förbjudet att ha utländska gäster. En på institutet har vunnit en bil på lotteri, men ingen har körkort, så jag får köra. Vi kör upp i bergen och blir stoppade av en polis. Han blir inte nämnvärt imponerad av mitt svenska körkort, men då visar någon en kopia av min inbjudan och då blir polisen mycket tillmötesgående. Jag får träffa Nicolas Popescu som Roos besökte på 60-talet.

Från Bukarest flyger jag till Östberlin. Jag har en muntlig inbjudan från Kurke men han kan inte möta mig. Först vill man inte släppa in mig. Men genom att punga ut med 15 DM får jag inresevisum. Klaus Haberland möter mig. Vi tillbringar en halv dag med att få utresevisum för mig. Jag blir satt i en lägenhet i en förort som påminner mycket om Kallhäll på 50-talet. På kvällen blir jag hämtad och vi ser en fantastisk föreställning av Brechts ”Aufstieg und Fall der Stadt Mahagonny” på Komische Oper. Efteråt äter vi anka för 5 kronor.

1981 söker jag en docenttjänst. Jan-Erik Björk är sakkunnig och kommer fram till att jag ”knappt men klart” går före tvåan. Har ingen reagerat på det motsägelsefulla i ett sådant yttrande? Resultatet blev att jag under sju år slapp den elementära undervisningen. Jag kunde också resa tämligen obehindrat. Sålunda reste jag ett flertal gånger till USA och Moskva.

Våren 1981 var det kombinatorik på Mittag-Lefflerinstitutet. Jag tillbringade en tid i Stockholm. Ett helt gäng reste till den första nordiska kombinatorikkonferensen på Utstein kloster på en ö utanför Stavanger. Vi såg Munckmuseet på vägen dit. Med på tåget var Stanley, Häggkvist och förmodligen Björner med flera. Jag delade rum med Olof Hanner, som höll föredrag om hur man skall organisera bridgeturneringar. Mitt i beviset blev han avbruten av konferensens organisatör Selmer, som sade: ”Nu är det cocktails”. Hanner blev förbannad och hade svårt att somna i den korta munksängen. Några intresserade danskar lyckades utverka att Hanner fick fortsätta beviset nästa dag. Många år senare var jag med på en annan kombinatorikkonferens i Norge. Där erbjöd sig Ronald Graham att lära alla att jonglera med tre bollar på 20 minuter.

Strooker bjöd in mig till Utrecht. Han bor i stadens äldsta hus. Jag talade i kollokviet och då blir man bjuden på pannkakor efteråt. Jag bodde hos Duistermaat och nästa dag cyklade vi till universitetet. Sedan tog jag tåget till Amsterdam och Hazewinkel. Han hade en enorm samling matematik- och fysiklitteratur. Taket till flygplatsen Schiphol är konstruerat av Björn Jawerts far.

Våren 1982 är jag åter i Sofia. Avramov har sökt en docenttjänst. De sakkunniga är eniga och har honom som etta. Men i nästa instans ges tjänsten till en partimedlem, som håller på med semigrupper. Men i högsta instans får Avramov tjänsten, ty hans far tillhör ”the most equal”. Han är ambassadör i Mexiko. Jag tar åter vägen över Bukarest hem. Denna gång stannar jag i Ruse vid Donau för att försöka hitta det hus där Canetti föddes. På den gatan talades åtta språk, men jag hittar den inte. Bădescu har nyligen köpt bil. Han har tagit körkort i USA, förmodligen med en automatväxlad bil. Nu får jag dirigera honom hela tiden och tala om vilken växel han bör använda. Jag är glad då vi återvänder till Bukarest. Staden är ännu dystrare nu än för två år sedan.

Sommaren 1982 var jag på en sommarskola i Montecatini, en liten stad helt dominerad av en vattenkuranstalt. Victor Kac höll utmärkta föreläsningar om ”quivers”. Där träffade jag också Concini, Seppälä och Randi Gupta (numera gift med Brylinsky på Penn State).

Läsåret 1983-84 tillbringar jag vid University of Illinois i Urbana. Det är ett år ägnat åt kommutativa ringar. Det kommer en mängd gäster för kortare tid: Stanley, Ribenboim, Hazewinkel, M.P.Malliavin, Schlessinger, Avramov, Hoechster, Hueneke, Erdös,...Dan Grayson har fått jobb där. Han har skrivit mycket av koden för Mathematica men inte fått tillräckligt betalt, så han har stämt Steve Wolfram. Det finns gott om talteoretiker. En av dem är prefekt. Det är Heini Halberstam, ursprungligen tjeck, men han kom via England, så han kallas ”sheriffen från Nottingham”. Andra är Bateman och H.Diamond. Men bäst kontakt får jag med Bruce Berndt. Han har sedan några år ägnat sig åt att bevisa alla formler i Ramanujans ”Notebooks”. Vi skriver senare tillsammans en prisbelönad artikel i American Math. Monthly med titeln ”Gauss,Landen,Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, π, and the Ladies Diary”. Ursprunglingen hade vi även ”the American Revolution” i titeln men den ströks.

Låt A vara en $n \times n-$matris med heltalskefficienter. Då är även spåren $b_k = Tr(A^k)$ heltal. Vilka heltalsföljder $b_1, b_2, ..., b_n$ kan förekomma som spårföljder? Detta hade jag lyckats utreda och hade ett villkor för b_k. Beviset var mycket elegant med hjälp av Wittringar och titeln slående, ”Integrity of Ghosts”. Jag höll föredrag om detta och då påpekade Stanley att Schur hade samma bevis redan 1937. Han använde alltså Wittringar förmodligen innan Witt uppfann dem. Nyligen har jag lagt ut artikeln på ”arXiv” ty resultatet innebär kongruenser i karaktärtabellen för vissa grupper (t.ex. S_n), som berömda gruppteoretiker (som Feit och Thompsen) inte kände till.

Så jag återvände till Lund som analytisk talteoretiker. Mest sysslade jag med asymptotiska formler för diverse partitioner. Modellen är den ”exakta” asymptotiska formeln för partitioner som Hardy och Ramanujan fann (och kontrollerades för n=200 av Major MacMahon). Jag hade funnit en ”exakt” formel för begränsade partitioner men inte lyckats bevisa den. Jag visade den för George Andrews vid en konferens i Minneapolis. Han försvann ett dygn och kom sedan med beviset. Under samma konferens höll Rota en serie föreläsningar om ”superinvarianter”. Han rättades ideligen av sina elever som satt längst fram. Han berättade historien om Weitzenböcks ”Invariantentheorie” där begynnelsebokstäverna i meningarna i förordet bildar ”NIEDER MIT DEN FRANZOSEN” (Gårding hade redan berättat detta för mig). Men jag visste inte att Weizenböck var general i första världskriget.

Jag studerade också plana partitioner. Där hade majoren funnit den genererande funktionen

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) x^n$$

en otrevlig funktion,som inte är modulär. Sir Edmund Maitland-Wright (känd för att 1938 ha skrivit en utmärkt bok i Talteori med Hardy) hade 1931 funnit huvudtermen i en asymptotisk formel för $\pi(n)$. A.O.L.Atkin i Chicago räknade ut flera $\pi(n)$ upp till $\pi(2000)$. Hörmander använde stenåldersspråket APL för att räkna ut andra saker åt mig. Han fick mig att klistra små lappar på sidorna av tangenterna på min dator och var mycket besviken då jag aldrig lärde mig att använda APL. Snart därefter kom Mathematica och Maple. Till sist hade jag asymptotiska formler så att jag kunde beräkna $\pi(200)$ ett 28-siffrigt tal med fel endast i sista siffran. I mitten av 90-talet fick jag ett brev från Wright, där han bad om ett särtryck.

Jag åkte till Moskva. Officiellt var jag inbjuden av Sergej Gelfand till IPPI (Institutet för överföring av information). Men jag träffade mest V.L.Popov, som var en av världens ledande forskare i invariantteori. Han hade ett seminarium i representationsteori tillsammans med Vinberg och Onishik (Jaroslav). Jag gick regelbundet på Shafarevichs och Gelfands seminarier. Livet för en matematiker var mycket annorlunda i Moskva jämfört med Sverige. Egentligen fanns det ingen institution. Det saknades tjänsterum. T.ex. i Algebra fanns det en ”Lärostol” med kontor och den innehades av Kostrikin. I.M.Gelfand var officiellt på ett institut för biologi. Varje måndag hade han sitt berömda seminarium kl 19. Men det började sällan förrän kl 20 och sedan pågick det tills man var färdig. Klockan kunde bli elva och då var hissarna avstängda så man fick gå nerför 13 våningar. Gelfand skrev nästan aldrig själv på tavlan. Han jagade i stället fram åhörarna, t.ex. Fuks eller Beilinson. Han började ofta mycket elementärt ty längst bak satt ett antal begåvade skolelever.

Ett annat seminarium som jag besökte drevs av Golod, Latishev och en K-teoretiker som jag glömt namnet på. Det pågick på följande sätt: En doktorand stod vid tavlan och hans professor satt längst fram och hörde på. Samtidigt satt de två andra professorerna längre bak och samtalade högljutt med sina elever. Det blev ganska olidligt efter ett tag. Jag blev inbjuden att tala i Kirillovs seminarium om mitt arbete med Dicks och Formanek i icke-kommutativ invariantteori. Om en sats säger jag: ”...and the proof is almost trivial”. Då hör jag från den tuffe Kirillov. ”Why almost”. Shafarevich hade på 60-talet skrivit en bok om Socialism. Detta ledde till att han kom i onåd och inte fick undervisa. Hans seminarium föregick i hans tjänsterum som var ganska litet. Folk stod ofta ute i korridoren.

Första gången jag var i Moskva, var också Bernd Herzog där. Hans fru var ryska och han talade hyfsad ryska. Han visade mig var antikvariaten låg och tog med mig till Steklovinstitutet på Vavilova. Vi åkte till klostret i Zagorsk även om det låg utanför den zon där jag fick vara.

En gång åkte jag vidare till Hadiev i Tashkent. Ett par dagar innan jag skulle åka blev jag kallad till Vetenskapsakademien. Man sade att det tillfälligtvis var matematiska konferenser både i Samarkand och Buchara så de gav mig visum till dessa städer. Det fanns naturligtvis inga konferenser, de var bara hyggliga. I Tashkent fick jag tala med tolk.En av åhörarna hette Renat, samma namn som en av Karl XII:s soldater som hamnade i Sibirien. Vi åkte tåg till Buchara där vi övernattade på en kolchos med 52000 får. Sedan blev vi körda tillbaka, via Samarkand, i kolchosens stora Volga.

Torsten Carleman var från Visseltofta i nordöstra Skåne. När han dog 1949 flyttades hans ting från Djursholm till Klockaregården i Visseltofta. I mitten av 80-talet ärvde Carlemans systerdotter, Lori Håland Klockaregården. Hon ringde institutionen i Lund och frågade om vi ville ha Carlemans bibliotek. Jag åkte dit och fyllde bilen med böcker. Jag frågade om det inte fanns några brev. Nej, de handlade bara om Acta Mathematica så dem hade hon slängt. Då jag kom hem, kom jag att tänka på att det stod en stor container i trädgården. Jag ringde och frågade om hon kastat breven i containern. Det hade hon. Turligt nog skulle min bror sätta upp en TV-antenn i Visseltofta nästa dag. Han dök ned i containern och fyllde två av Carlemans koffertar med brev och manuskript. Ett år senare fick jag ett paket från Håland. Det innehöll diverse papper, bl.a. ett med en adress: Oskar Johansson, Skytteboda, Verum. Det var min morfar. Han var snickare men hade lärt sig att dra ut kvadratrötter av en luffare (som kan ha varit Harry Martinsson. Han övernattade en gång hos min morfar). Men det är inte troligt att Carleman och min morfar hade några matematiska mellanhavanden. Snarare ville Carleman låna pengar i Verums bank, där min morfar var förtroendeman.

1987 fyllde Ramanujan 100 år. Det var en stor konferens i Urbana. Där träffade jag engelsmannen John McKay från Montreal. Han kände till Almqvist som kompositör. McKay är känd som upptäckaren av "moonshine".Han såg att $196884 = 196883 + 1$, där 196884 är en koefficient i en utvecklingen av den modulära funktionen $j(q)$ och 196883 är dimensionen av den minsta icke-triviala representationen av den största sporadiska enkla gruppen, kallad "Monstret". Detta förklarades så småningom av Richard Borcherds (Fieldsmedaljör) med hjälp av resultat av bl.a. Arne Meurman. Vid ett besök i Höör talade McKay och jag om hur konstiga matematiker var. Till sist sade jag. "Det är nog bara du och jag som är normala". Han tänkte efter en stund, varefter han sade. "I am not so sure about that either".

Vid samma konferens träffade jag också Doron Zeilberger, en israel som hamnat i USA, först Philadelphia och senare på Rutgers. Hans föreläsningar är märkliga, "I don't lecture, I preach". Han påminner onekligen om en salvelsefull frikyrkopastor när han framför sitt budskap. Det är att datorn är smartare än människan och bevis är föråldrat. Det räcker att man vet att sannolikheten för att något är fel är 10^{-500}. Men han har med Herb Wilf gjort ett program som verkligen bevisar identiteter som innehåller binomialkoefficienter (i Maple kallas det ”Zeilberger”). Han bor i Princeton och jag har besökt honom ett flertal gånger. Han publicerar ofta under pseudonomen ”Shalosh B.Ekhad”, vilket är namnet på hans dator (det är hebreiska och betyder $3B1$). Han använder adjektivet ”shaloshable”. Med Viggo Kann (son till Gerd och Henrik Eriksson) finns en artikel (officiellt skriven av två datorer), där den berömda Rogers-Ramanujans identitet bevisas ”utan en mänsklig tanke”.

R.D.North räknade med 40 siffror ut följande summa

$$4\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...-\frac{1}{999999}\right\}$$

$$=3,1459\underline{0}6535897932\underline{40}4626433832\underline{6}9502884197$$

Jämför man med

$$\pi=3,14592653589793238462643383279502884 19$$

så ser vi att endast understrukna decimalerna är fel. J.Borwein, P.Borwein och K.Dilcher förklarade detta i en åttasidig prisbelönt artikel i American Math. Monthly. Man har nämligen den asymptotiska formeln

$$4\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...-\frac{1}{n-1}\right\}=\pi-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^3}-\frac{10}{n^5}+\frac{122}{n^7}-...$$

Sätter man $n=10^6$ så får vi precis de understrukna felen. Några år senare upptäckte jag att följande rad i Maple förklarar allt

```
asympt(simplify((sum(-4*(-1)^j/(2*j-1),j=1..n/2)-Pi)/(-1)^(n/2+1),n,8);
```

Zeilberger blev överlycklig, detta var ånyo ett bevis för datorns överlägsenhet. Han tvingade mig att skriva en artikel i Monthly. Det var för övrigt enda gången jag skrivit i teX. Det tog en enorm tid trots hjälp från experter. Nu använder jag Scientific Word som är oändligt mycket lättare (formler kommer upp i klartext direkt på skärmen). Men detta anses inte vara riktigt fint av teX-fanatiker.

Bruce Berndt anordnade ett party för hela konferensen i sitt hus. Samtidigt var det tornadovarning. Men tornadon gick Urbana förbi. Bröderna Chudnovsky var också med. De var bland mycket annat kända för att ha innehaft världsrekordet i antalet decimaler av π. Detta hade åstadkommits på en hembyggd dator. Jag råkade nämna LLL-algoritmen (Lenstra-Lenstra-Lovacs) vid lunchen. David Chudnovsky sade ilsket ”We found it first”. De lovade att hjälpa mig att starta en induktion för att bevisa en sats om unimodala följder (Kimmo Eriksson hade hjälpt mig tidigare. Han var nog 14 år då). Men jag fick aldrig något resultat från dem.

Den berömde fysikern Freeman Dyson höll ett föredrag med titeln "A walk in Ramanujan's garden". Han hade under bombningarna av London funnit t.ex följande identitet

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2+n} \frac{(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)...(1+x^n+x^{2n})}{(1-x)(1-x^2)...(1-x^{2n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^{9n}}{1-x^n}$$

vilken Ramanujan skulle ha uppskattat. Dyson höll senare ett föredrag("Star Wars and all that") av samma typ, som Grothendieck hade hållit i Berkeley 17 år tidigare. Det var riktat mot det militär-industriella komplexet.

Bill Gosper var också på konferensen. Han var en föregångare till Zeilberger genom sin algoritm för teleskopisk summering. Han höll ett mycket roande föredrag med märkliga identiteter, alla funna på dator. Han hade också ryggsäcken full med bumeranger. Baxter från Canberra talade om användningen av Rogers-Ramanujans identitet i statistisk fysik (hexagonmodellen).

Christian U.Jensen i Köpenhamn studerade hos Hasse i Hamburg. Han kunde t.ex. bevisa satser om konstiga ringar där dimensionen var två eller tre beroende på om ett visst axiom i mängdläran gällde. Han studerade även det omvända Galoisproblemet tillsammans med Noriko Yui. Han arbetade på nätterna och kom sällan till institutionen före klockan tre. Han samlar på inkunabler och brukade ringa mig då han gjort något riktigt fynd. En gång då han var sakkunnig i Lund blev han osams med Gårding och vägrade senare att hos Roos sova i en säng som Gårding sovit i.

Gudrun Brattström vikarierade för Hörmander en termin då han var chef på Mittag-Lefflerinstitutet. Vi bjöd in Christian U. Jensen för att hålla föredrag. Det var klockan tre men alldeles för tidigt för att Christian U. skulle kunna ta sig från Köpenhamn samma dag. Så han skulle komma kvällen innan och övernatta på institutionen. Vi fick den absurda idén att bjuda honom på vin. Detta skulle köpas på systemet klockan nio då jag kom med tåget från Höör. Så vi hängde på låset med alla A-lagarna. Ytterligare en från institutionen uppenbarade sig så tidigt, nämligen Hörmander...Sedan visade det sig att Christian U. inte alls ville ha något vin. Nästa dag hade jag allt besvär i världen att väcka honom före klockan tre.

Jaak Peetre gav mig en artikel och sade: Kan du se något positivt i det här? Han var sakkunnig i Trondheim och artikeln var skriven av Lisa Jakobson och Haakon Vaadeland. Den handlade om kedjebråk och avslutades med en formel för ellipsens båglängd

$$L = \pi \left\{ a + b + \frac{3(a-b)^2}{10(a+b) + \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}} \right\}$$

vilken jag omedelbart kände igen från Ramanujans "Notebook" där den har beteckning "very nearly". Genom att utveckla potensserien för den elliptiska integralen, som ger båglängden, hade man helt säkert hittat den metod som

Ramanujan använt. Först blev de något förlägna över att inte ha känt till Ramanujans formel, men det är faktiskt en prestation att komma på hur Ramanujan funnit sina formler. Resultatet blev att jag blev inbjuden till Trondheim. Det regnade i stort sett hela tiden jag var där. På hemvägen i Dovre råkade jag komma in i en snöstorm trots att det var den första veckan i september. Numera korresponderar jag en del med Peter Lindqvist, mest om Peetres Meissnerprojekt.

I samma hus som institutionen på Hagagatan i Stockholm fanns ett naturvetenskapligt bibliotek på 900 hyllmeter samlat av Alf Kåre. Överbibliotekarien beslöt att allt skulle kastas. Jan-Erik Roos och jag räddade en del dyrgripar genom att bära in dem på matematiska institutionen. Samtidigt drev Jan Myrdal en kampanj i Svenska Dagbladet att odugliga bibliotekarier skulle ersättas med obetalda eldsjälar. Så jag skrev "Bokbålens tid är inte förbi" i Svenskan. Senare vid ett samfundsmöte på KTH träffade jag Magnus Giertz. Han hade en bokhylla full med gamla böcker. Man hade haft ett styrelsebeslut att kasta alla gamla böcker, men han hade räddat några med fina band för att ge till besökare.

Jan-Erik Björk började att studera i Lund. Hylta-Kalle lär ha underkänt honom i en muntlig tentamen, trots att han hade alla rätt på skrivningen. Han har skrivit böcker om D-moduler och är en uppskattad skulptör med verk både på Mårbacka och i Krasnojarsk (av Sibiriens ängel, Elsa Brändström). En gång skulle han köra bil till Paris. Han mellanlandade i Lund för att köpa Fyledalslera. Den ville han inte ha med sig till Paris så jag fick överta den. Den finns fortfarande i min källare. Jan-Erik gick på Kalle Ankafilm med ett litet barn. Då det blivit mörkt i salongen kom tre vuxna män in och satte sig framför barnet, som sade: Flytta på dej,gubbe! Den framförvarande vände sig om. Det var den svenske kungen. Jan-Erik har alltid någon käpphäst, som han ägnar sig helhjärtat åt. Sist jag träffade honom var det Carleman. Där ger jag honom helt rätt. Nutida svenska matematiker vet nog inte hur stor Carleman var (Gårding visste, se hans bok).

KNUT OCH ALICE WALLENBERGS STIFTELSES RESEFOND

och

MATS ESSÉNS MINNESFOND

Svenska matematikersamfundet kan än en gång utlysa resestipendier avsedda för ograduerade forskare i matematik. Med ograduerade forskare avses de som ännu ej avlagt doktorsexamen.

Wallenbergsstipendierna är till för att utnyttjas som delfinansiering för konferensresor och kortare utlandsvistelser. Stipendierna kan användas som hel- eller delfinansiering för resekostnader, logi, konferensavgifter o. dyl., men inte till traktamente. Stipendiebeloppet är högst 4000 kr/person.

Essénstipendierna är i första hand avsedda för deltagande i sommarskolor och liknande aktiviteter. I övrigt gäller samma regler som för Wallenbergsstipendierna så när som på att stipendiebeloppet kan sträckas så högt som 6000 kr/person.

Personer som fick resestipendium från matematikersamfundet i fjol kan inte komma ifråga i år.

Till ansökan skall bifogas

- Meritförteckning
- Budget för resan
- En kortfattad redogörelse för resans betydelse för den sökandes forskningsarbete (denna skall vara styrkt med ett intyg från handledaren)
- Adressuppgifter inkl emailadress

Det skall framgå huruvida ansökan avser Wallenbergs- eller Essénstipendier, eller båda. (Dock kommer Wallenbergs- och Essénstipendier normalt inte att utdelas samtidigt till samma sökande.) Ansökan skall skickas som pdf-filer med email till Samfundets vice ordförande Mikael Passare. Observera att handledarintyget ska inskannas och medsändas.

Ansökan skall vara inkommen **senast den 31 mars 2010** . Sökande ges därefter besked så snart som möjligt via email, sedan beslut om Wallenbergsstipendier fattats av Svenska matematikersamfundets styrelse, och beslut om Essénstipendier av styrelsen för Matts Esséns minnesfond.

Efter fullgjord resa skall reseräkning inkl. originalbiljetter skickas till samfundets skattmästare Milagros Izquierdo Barrios. Utbetalning kan antingen ske till stipendiaten eller dess institution. Obs! Om utbetalningen går till institutionen så kommer overhead att avdragas från summan.

SMS betalar godkända kostnader som är resor, konferensavgifter, logi och liknande, men inte traktamente. Att underlagen ska vara ordentliga är också för att förhindra att stipendiaten får betalt för resor som inte gjorts, eller får dubbelt betalt.

Om utbetalning sker till stipendiatens institution (i Sverige) krävs ett underlag från instutionen där resekostnaderna specificeras (dvs kopia på reseräkningen), så att det framgår att kostnaderna, utöver traktamente, varit på stipendiebeloppet eller överstigit detta (om de understigit stipendiebeloppet betalas istället detta lägre belopp ut).

Om utbetalning sker till stipendiaten kan vi se två huvudfall:

1. Att till ansökan bifogas ett intyg från resp instution att löneavdrag gjorts för personen med minst stipendiebeloppet (eller lägre yrkat belopp), och att ett underlag från institutionen bifogas på samma sätt som ovan (så att det är klart att de godkända kostnaderna varit tillräckligt stora).

2. Riktiga original bifogas ansökan, i alla fall till säg 90% av beloppet och i så fall kopior på resten av utläggen. När det gäller elektroniska biljetter eller dylikt så räknar vi en utskrift av dem som "riktiga original". (Det framgår då att resan gjorts och att med stor sannolikhet kostnaden funnits.)

Eventuella frågor besvaras av Mikael Passare.

◇ ◇ ◇ ◇

Euwe och Lasker

Machgielies (Max) Euwe (1901-81) doktorerade i Amsterdam 1926 på en avhandling med titeln *Differentiaalinvarianten van twee covariantie-vectorvelden met vier veranderlijken*. Därefter var han verksam som matematiklärare i en flickskola. Även om han är mest känd som schackspelare, som sådan var han Holländsk mästare redan som tonåring, lär han ha prioriterat matematiken. Dock hans bedrifter därvidlag väger lätt i jämförelse med att ha berövat Alekhin världsmästartiteln 1935. Elaka tungor hävdar dock att detta till en stor del kan skyllas på Alekhins alkoholism, och när denne två år senare hade nyktrat till, återog han mycket riktigt titeln. Intressantast för oss är att Euwe utsatte schack för en matematisk analys, han gav exempel på en oändlig binär serie med inga tre gånger konsekvent upprepade undersekvenser och slöt därmed att ett schackparti kan vara oändligt tvärt emot vad de flesta schackspelare hade trott[1]. Euwe var mot slutet av sitt liv (1970-8) president för FIDA, och presiderade under den beryktade Fischer-Spasskij drabbbningen i Reykavik 1972. Ett uppdrag som krävde en hel del takt och tålamod.

Emanuel Lasker (1868-41) var en betydligt mera framstående matematiker, och doktorerade i Erlangen 1902. Hans papper *Zur Theorie der Modulen und Ideale*(Math.Ann.**60**(1905)) citeras fortfarande och presenterar ett bevis för Lasker-Noethers primäruppdelningssats. Han var dessutom världsmästare under en betydligt längre tid - (1894-21) genom att erövra titeln från den förste regerande världsmästaren - Steinitz. I sinom tid förlorade han mot den tjugo år yngre Capablanca och slutade därefter att spela seriöst. Genom att kräva höga arvoden bidrog han till spelets professionalisering . Han var även mycket skicklig i Bridge och Go, och uppfann sitt eget spel Lasca (en variant av Dam). Inte förvånande skrev han en hel del om spel, inte bara om schack utan även kortspel, och utövade även ett inflytande på den tidiga spelteorin. Däremot har hans filosofiska skrifter och teaterpjäs ignorerats av eftervärlden.

[1] Diverse *ad hoc* regler har föreslagits för att förhindra denna, visserligen intressanta men opraktiska fenomen

Sista Ordet

Arne Söderqvist

När vi debatterar jämställdhet i detta land, kommer diskussionen raskt in på frågan om kvinnors och mäns möjligheter eller om löneskillnader mellan olika grupper på arbetsmarknaden. Den mer abstrakta aspekten, den om skillnader i livskvalitet, lämnas så gott som alltid därhän. Sådana skillnader har ofta grundlagts i tidig ålder och är därmed svåra att utjämna.

Barndomen är den dyrbaraste tiden i livet; det är under barndomen resten av livet blir utstakat. Barn roas av att lära sig "meningslösa" saker. Barn har ingen nyttoaspekt då de lär sig tala, lär sig ramsor som "måndag, tisdag, onsdag, ..." eller ens då de lär sig läsa, skriva och räkna i skolan. Vid litet högre ålder har barn därmed en referensram att fylla ut med nya saker och kan också börja uppfatta en struktur hos alltsammans, såsom att sju dagar bildar en vecka. Referensramarna vidgas successivt och med vidgade referensramar ökar också förmågan att ta för sig av det kulturutbud som står envar till förfogande. På så sätt kan livet te sig intressant och meningsfullt.

Medvetna föräldrar med resurser, främst i form av tid, ägnar sig åt lek, sång och högläsning tillsammans med sina barn. Tid är dessvärre en bristvara i dagens jäktade samhälle och det är vanligt att barnen får tillbringa mycken tid framför familjens TV-apparat eller dator medan föräldrarna, helst ostörda, ägnar sig åt nödvändiga bestyr i hemmet. Barnen blir därmed utlämnade till vad media består dem med. En kollega till mig berättade en gång att de allra första orden hans yngste son yttrade var 'Livet har sina goda stunder!', alltså en reklamslogan för McDonald's som upprepades åtskilliga gånger i TV:s reklamkanaler. Så blev det, trots att kollegan med hustru måste sägas vara mycket medvetna föräldrar. Det inträffade belyser snarare den stora genomslagskraft TV-mediet har.

Att TV verkligen har stor genomslagskraft och att många barn är okritiskt utlämnade till mediets program och kommersiella budskap har för länge sedan uppmärksammats i USA. För att åstadkomma en motvikt till alla reklamfinansierade program producerades där, med stöd av federala medel, TV-serien 'Sesame Street' avsedd för de yngsta barnen. Avsikten var att försöka ge barnen en god referensram redan vid mycket unga år. I den fria företagsamhetens förlovade land strävade man efter att göra serien så intressant och lockande att barnen självmant föredrog denna och valde bort andra alternativ. Det var alltså fråga om konkurrens i ordets bästa bemärkelse. Den svenska serien 'Fem myror är fler än fyra elefanter' har producerats med samma målsättning och har haft just 'Sesame Street' som förebild. Dessvärre var det fråga om en engångssatsning; ingen kanal har gjort någon motsvarande produktion under det senaste kvartsseklet. TV-kanalerna tycks numera tävla om tittarnas gunst genom att sända alltmer meningslösa tävlingar och såpoperor. Konkurrensen är helt satt ur spel, i varje fall när det gäller att producera program med budskap värda att lägga på minnet.

I Sverige försöker vi skydda barnen mot så många faror som möjligt. Det har tom. diskuterats om cykling utan hjälm skulle förbjudas. Jag bodde en gång på ett hotell i norra Thailand. Rummet var av hygglig klass, med bla. balkong, vilket jag uppskattade. Jag fann att på balkongen hängde det ett antal koppartrådar, som jag först uppfattade som tvättlinor. Jag såg sedan att koppartrådarna, som var helt inom räckhåll även för barn, var fästade i porslinsknoppar. Min farhåga om att det var fråga om spänningförande elledningar bekräftades. Så vill vi inte ha det i Sverige. Vi rankar såväl trafiksäkerhet som elsäkerhet mycket högt i vårt land. Men, av någon anledning tycks vi också vilja skydda svenska barn från matematik; moment som bara för några år sedan ingick i grundskolekursen har numera hänförts till gymnasiet och mycket som utgått ur gymnasiekursen måste tränas under 'repetitionskurser' och 'introduktionskurser' för teknologer som påbörjat sina ingenjörs- och civilingenjörsutbildningar.

Detta faktum är tämligen obegripligt. Antagligen har man aningslöst velat göra tillvaron så bekväm och kravlös som möjligt för barn och ungdomar. Vad man därmed missat är de år då människan är som mest formbar och finner sina intressen. Det är ytterst sällsynt att någon i de övre tonåren börjar intressera sig för helt nya saker. I varje fall kan ju ingen bli intresserad av sådant man inte vet om eller ens har hört talas om. Tyvärr saknar skolan numera värdiga företrädare för matematiken (och antagligen även andra ämnen). Vad matematik egentligen är, är förstås inte lätt att säga, men inom skolväsendet finns numera ytterst få lärare som ens kan ge en antydan. Istället för att erkänna sina misstag får man nu, från ansvarigt håll, höra att matematiken egentligen alltid har varit överskattad och att tom. blivande civilingenjörer tvingas lära sig onödigt mycket matematik.

Förvisso anser många skolelever att matematik är ett 'tråkigt' ämne. För att försöka ändra på denna inställning har det utfärdats direktiv om att matematikens nyttoaspekter ska belysas i skolundervisningen. Tyvärr räcker inte ens gymnasiematematiken särskilt långt när det gäller att lösa vardagliga problem som inte kunde lösas utan matematik. Det är ingen mening med att formalisera sysslor man vanligtvis utför rutinmässigt. Vardagen kan dock ibland beskrivas med matematik med syftet att sedan generalisera, men då är det nästan alltid fråga om matematik på i varje fall akademisk grundnivå.

De år då människan är naturligt nyfiken och känner upptäckarglädje är ofta förbi under högstadie- och gymnasietiden. Då visar det sig om de dyrbara barndomsåren tillvaratagits eller ej. Det är då de grundläggande referensramarna behövs för att nya kunskaper ska gå att infoga i ett bekant sammanhang. Antag att en teknolog fick i uppgift att lära in följande bokstavsföljd, där bokstäverna inte är uppställda i bokstavsordning.

KUNGLIGA TEKNISKA HÖGSKOLAN

Antag vidare, att någon anser att bokstavsföljden var alldeles för lång och av välvilja gör den kortare.

KNLGA TENSA HÖSKL

Man ser omedelbart att det vore fråga om en björntjänst. Just att den första bokstavsraden bildar ett välkänt begrepp, ett sammanhang, underlättar inlärningen väsentligt. Jag tror att det är sådan missriktad välvilja som ligger bakom det faktum att många elever känner ovilja mot matematik. Faktum är att jag tror att även den frustration som civilingenjören Peter Nordberg känt inför matematiken på KTH och tillkännager i en intervju på annan plats i denna tidning, egentligen har samma grund. Studierna på KTH är med nödvändighet forcerade och de kanske måste fortsätta att vara så. Men förvisso kunde man stanna upp ibland för att belysa olika matematiska sammanhang. Jag har själv haft en matematiklärare under mina akademiska studier som gjorde sig denna möda och det var mycket uppskattat! (Jag blev dock inte matematiker själv, men väl matematiklärare.)

John F. Kennedy tillfrågades under presidentvalskampanjen i USA 1960 varför han försökte få nationens högsta ämbete när han redan hade pengar nog för en bekymmersfri tillvaro under resten av sitt liv. Kennedys svar var att det hårdaste arbete som finns är att försöka få tillvaron te sig meningsfull när man inte har något att göra. Tyvärr ser man alltför mycket av håglöshet och apati hos många unga i dagens samhälle. Antagligen är det den sortens arbete som Kennedy avsåg som man försöker utföra. Med en bättre start i livet, där den naturliga nyfikenheten och upptäckarglädjen hos barn tillvaratas och där referensamarna successivt utvidgas behövde det inte vara så. Man kunde med fördel utnyttja de media som har stor genomslagskraft på bästa sätt och det vill dessutom till att skolan förmår fortsätta att ge stimulans så att inga intressen svalnar. Ämneskunniga lärare är en förutsättning. Inställningen att 'framgångsrika elever alltid kommer att klara sig' måste överges. För fortsatt framgång krävs stimulans. I annat fall riskerar den att bytas mot just håglöshet och apati.

Rondablikk, 9/1 2010

KALENDARIUM

(Till denna sida uppmanas alla, speciellt lokalombuden, att inlämna information)

Finsk-svensk talteorikonferens
KTH 26-28 maj
Årsmötet
Umeå 4-5 juni
Svensk-Catalanskt möte
Barcelona 16-18 september

Författare i detta nummer

Gert Almkvist Föreståndare för Algebraisk Meditation i Höör. Numera verksam som talteoretiker.

Lars-Christer Böiers Lektor i Lund. Flitig läroboksförfattare.

Philip Davis medförfattare till Reuben Hersh i ett antal böcker om matematik, som 'The Mathematical Experience'

David Mumford Fieldsmedaljör Vancouver 1974. President för IMU 1998-02. Numera engagerad i 'Computervision' vid Brown University.

Peter Lindqvist Verksam i Trondheim. Ursprungligen finlands-svensk matematiker.

Arne Söderqvist Engagerad skribent och flitig medarbetare och korrekturläsare iUtskicket. Verksam vid KTH Syd.

Innehållsförteckning

Notiser