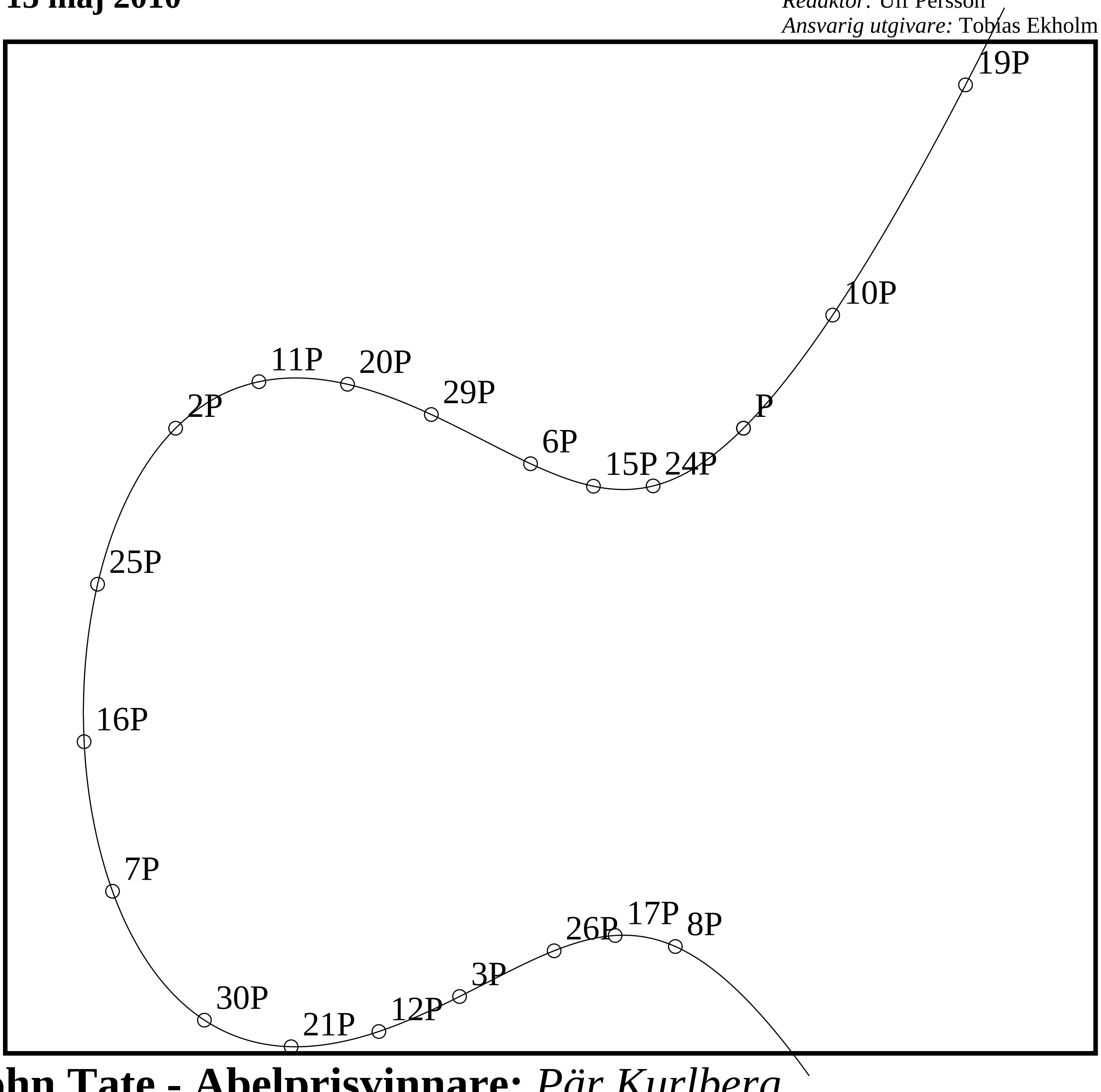
Svenska Matematikersamfundet

MEDLEMSUTSKICKET

15 maj 2010

Redaktör: Ulf Persson
Ansvarig utgivare: Tobias Ekholm



John Tate - Abelprisvinnare: *Pär Kurlberg*
Perelman - : *Intervju med J.Carlson*
Mittag-Leffler: *Arild Stubhaug & Anders Björner*
Matematiska Memoarer II: *Gert Almkvist*
Robert Berman-Wallenbergare:*Bo Berndtsson*
Sista Ordet: *Dan Laksov* **Årsmöte - Umeå 4-5 juni**

UTSKICKET

utkommer tre gånger per år I Januari, Maj och Oktober. Manusstopp är den första i respektive månad

Ansvarig utgivare: *Tobias Ekholm*

Redaktör: *Ulf Persson*

Adress: *Medlemsutskicket c/o Ulf Persson*
Matematiska institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Manus kan insändas i allehanda format `.ps, .pdf, .doc` Dock i tillägg önskas en ren text-fil. Alla texter omformas till `latex`

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET

är en sammanslutning av matematikens utövare och vänner. Samfundet har till ändamål att främja utvecklingen inom matematikens olika verksamhetsfält och att befordra samarbetet mellan matematiker och företrädare för ämnets tillämpningsområden.

För att bli medlem betala in avgiften på samfundets `plusgirokonto 43 43 50-5.`
Ange namn och adress på inbetalningsavin (samt om Du arbetar vid någon av landets institutioner för matematik).

Medlemsavgifter (per år)

Individuellt medlemsskap, *200 kr*

Reciprocitetsmedlem *100 kr.*

(medlem i matematiskt samfund i annat land med vilket SMS har reciprocitetsavtal):
Doktorander gratis under två år

Gymnasieskolor: *300 kr.*

Matematiska institutioner: *Större 8 000 kr, mindre 3 000 kr*

(institutionerna får sälva avgöra om de är större eller mindre).

Ständigt medlemsskap: *2 500 kr (engångsinbetalning)*

Man kan även bli individuellt medlem av EMS genom att betala in 250 kr till Samfundet och skriva EMS på talongen.

HEMSIDA: `http://www.swe-math-soc.se`

Här återfinnes bl.a. protokoll från möten

STYRELSE:

ordförande *Tobias Ekholm*
`018 - 471 63 99`
`tobias@math.uu.se`

vice ordförande *Mikael Passare*
`08 - 16 45 46`
`passare@math.su.se`

sekreterare *Warwick Tucker*
`018 - 471 33 18`
`Warwick.Tucker@math.uu.se`

skattmästare *Milagros Izquierdo Barrios*
`013 - 28 26 60`
`miizq@mai.liu.se`

5:te ledamot *Jana Madjorava*
`031 - 772 35 31`
`jana@math.chalmers.se`

Detta Nummer

Årets Abelpristagare uppmärksammas alltid i Utskickets vårnummer, och denna gång är inget undantag. Undantaget skulle i så fall vara att Tates utmärkelse uppmärksammas ovanligt mycket av svenska matematiker. Ganska direkt efter utdelningen i Oslo anordnar KVA och Mittag-Leffler ett Tate-symposium. Mera information står att läsa i detta nummer. Vidare har Pär Kurlberg skrivit en utförlig presentation av Tates arbeten, dock utan ambitioner på att vara heltäckande, istället har Pär valt att lyfta fram hans insatser inom den aritmetiska teorin för elliptiska kurvor. Elliptiska kurvor kommer även att pryda omslaget och närmare förklaringar lämnas i det sedvanliga 'Titelsidans illustration'. Jag har även bett Loren Olson att inkomma med några personliga hågkomster av Tate, ty Loren var undergraduate vid Harvard en gång i tiden och hade då bland annat Tate som uppskattad lärare. Tate var förresten den förste matematiker jag träffade på Harvard när jag kom dit som graduate student hösten 1971. Han var då 'chairman' för institutionen och tog emot alla nya graduate studenter i sitt spaciösa kontor i den gamla byggnaden på 2 Divinity Avenue[1]. Han var något 'intrigued' av det faktum att jag var svensk, ty fortfarande på den tiden var det smått exotiskt med utländska studenter, och han undrade om jag kände Mumfords norske kusin, ty detta hörn av världen syntes tydligen så litet.

När det gäller internationella matematiker är väl Perelman mera känd bland allmänheten än de flesta. Inte nog med att han vägrade ta emot Fieldsmedaljen (han är Fieldsmedaljör trots allt) nu har han också konsekvent vägrat att ta emot Clay-priset på en miljon dollar. Matematisk ära i all ära, en miljon dollar smäller betydligt högre för allmänheten, även om summan är något av småpotatis (peanuts) när det gäller bonusar i den famösa finansvärlden. Jag har intervjuat föreståndaren för Clay-Institutet - Jim Carlsson.

Mittag-Leffler har ekonomiska problem. Det är en öppen fråga hur institutet skall bedrivas på bästa sätt, och i vilken mån den etablerade traditionen må modifieras, vilket kan vara ett lämpligt diskussionsämne för Utskickets läsare. Institutets föreståndare - Anders Björner, bidrager med en rapportering av de smått sorglustiga ansträngningarna med att söka en mera stabil finansering av institutet och statsmakternas kallsinnighet. Arild Stubhaug, om något en expert på Mittag-Leffler, har även hörsammat min inbjudan att redogöra för Institutets och Högskolans tillblivelse. Och slutligen är Lennart Carleson mycket positiv till att berätta om hur han en gång i tiden väckte institutet från sin Törnrosasömn, men är tyvärr förhindrad från att redan nu presentera ett manuskript. Detta är något att se fram emot i ett kommande nummer av (troligen) Normat.

[1] En byggnad som delades med den expanderande 'department of East Asia Studies' vilken nästföljande år tog över hela byggnaden.

Annars avslutas publiceringen av Gert Almkvists memoarer i och med att dess andra del står att finna i detta Utskick. Memoarer som jag personligen finner uppfriskande frispråkiga och av den art som jag alltid har efterlyst. Jag är synnerligen tacksam för att Gert har valt att publicera dem i Utskicket. Vidare har min intervju med Nordberg stimulerat Peter Hackman att komma med en betraktelse över matematikutbildning på universitetsnivå, vilket jag tacksamt tar emot.

Pär Kurlberg, har även fått det prestigefyllda Göran Gustafssons stipendiet. Detta uppmärksammar jag genom en kort presentation av den utvalde. Vårt eget Wallenbergpris har i år tilldelats till Robert Berman, som även han presenteras kortfattat, medan hans forne handledare Bo Berndtsson bidrager med en utförligare beskrivning av hans vetenskapliga arbeten.

Vår ordförande inkommer med en sedvanlig ledarkrönika, och längst bak i numret finner läsaren information om Samfundets räkenskaper samt program och dagordning för årsmötet som skall äga rum i Umeå den 4-5 juni.

Vicente Muñoz som är chefredaktör för EMS Newsletter propagerar för att mera europeiska matematiker skall vara medlemmar i EMS. För närvarande har EMS bara 2000 medlemmar vilket skall jämföras med de 32000 som är medlemmar i AMS. EMS startade som en paraplyorganisation för de europeiska matematiska samfunden, men även individuellt medlemskap är en (beklagansvärt lite utnyttjad) möjlighet. Tidigare var det något omständligt att gå med i EMS, eftersom man måste göra anmälningen via sitt eget modersförbund och involvera något obskyrt bankkonto i Finland. Nu är det sedan sommaren 2008 betydligt enklare eftersom man kan göra det på webben. Processen förklaras närmare i artikeln. Jag noterar personligen att 2/3 av EMS budget går till Newsletter (och redaktörerna arbetar som förväntat ideellt) och att de värnar om papperstidningen.

Slutligen fortsätter traditionen med 'Sista Ordet'. Denna gång är det Dan Laksov som hackar på tangenterna. Varför skall man egentligen vara medlem av Samfundet? En fråga som oförhappandes relaterar till Muñoz artikel.

Utskickets framtid är mycket oviss. En diskussion om dess framtida form och eventuella finansering skall föras under det kommande årsmötet, vars dagordning återfinnes på sidan 95. Sju år har förlupit och 21 utgåvor har sett dagens ljus. Utskicket har inte i första hand varit ämnat som ett informationsblad utan varit avsett som en social institution. Dess syfte har således varit att ge svenska matematiker en gemensam identitet. Därför riktar jag ett varmt tack till alla de medarbetare som under årens lopp ställt upp med artiklar och uppslag, ofta med mycket kort varsel. Dessa kontakter har personligen varit mycket viktiga och stimulerande för mig. Jag vill även varmt tacka de ordföranden som stött och uppmuntrat mig i mitt värv.

Ulf Persson (redaktör) Göteborg 15 maj 2010

Askmoln och utvärdering

Tobias Ekholm

Den 17–18 april var det meningen att ett möte som EMS ordförande Ari Laptev kallat alla europeiska nationella matematiksamfunds ordförande till skulle hållas i Bukarest. Vid den tiden blockerade dock askmolnet från Eyjafjallajökull i stort sett hela Europas flygtrafik, så mötet fick ställas in och därmed finns tyvärr inget därifrån att rapportera.

Ett antal för samfundet viktiga händelser stundar under slutet av våren och sommaren: Den 4–5 juni äger samfundets årsmöte rum i Umeå med sedvanliga programpunkter: Årsmöte, fyra föredrag (alla med analys/PDE inrikting), presentation av årets Abelpristagare Tate samt utdelning av Wallenbergpriset till Robert Berman för "ett flertal fundamentala och nyskapande arbeten inom komplex differentialgeometri och pluripotentialteori. Han har genom sin forskning bidragit till klargörandet av tidigare olösta frågor om till exempel asymptotik för Bergman-kärnan och konvergens av Feketepunkter mot jämviktsmåttet." (kommittens motivering). För detaljer om mötet hänvisas till hemsidan och annons på sidan 89.

Den utvärdering som Vetenskapsrådet (VR), och Stiftelsen för Strategisk Forskning (SSF) för närvarande gör av svensk forskning inom matematik (projekt som finansierats under åren 2002–2006) kommer att fullgöras. Sista datum för enskilda projekt att inlämna underlag för utvärderingen var 31:a mars. En expertpanel bestående av Ulf Danielsson, (Teoretisk fysik Uppsala Universitet, ordf.), Maria Esteban (Centre De Recherche en Mathématiques de la Décision Université de PARIS – DAUPHIN), Geir Ellingsrud (Senter for matematikk for anvendelser, Matematisk institutt Oslo), Joel Spencer (New York University), Tom Kurtz (University of Wisconsin), Alistair Fitt (University of Southampton), Olavi Nevanlinna (Helsingfors Tekniska Högskola), Björn Birnir (UC Santa Barbara), Kari Astala (University of Helsinki) och Roger Howe (Yale) möts under veckan 14–18 juni i Stockholm och ska då sammanställa rapporten samt träffa bl a representanter för de olika lärosätena. Utvärderingens syfte beskrivs i punktform vara att:

- i ett internationellt perspektiv ge en bedömning av forskningsområdets vetenskapliga värde, kvalitet och resultat
- identifiera starka och svaga forskningsfält
- identifiera svensk forsknings inom matematik roll i ett internationellt perspektiv
- identifiera forskningens avtryck i samhället gjort i det korta perspektivet
- identifiera balansen mellan Matematik, Teknisk matematik och Tillämpad matematik

- identifiera Institut Mittag-Lefflers roll inom svensk matematisk forskning i den form det är organiserat och finansierat idag

- identifiera potentiellt intressanta områden inom forskningen

Punkten om Mittag-Leffler instuitutet kan få omedelbar praktisk relevans. Institutet lider av ekonomiska problem och man får hoppas att utvärderingens resultat kommer kunna användas som argument för att säkra starkare finanser för institutet framgent[2]. Övriga punkter kan väl betraktas som ganska allmänt hållna och är svåra att kommentera innan man sett resultatet av utvärderingen. Vid en första anblick ger de dock intryck att syfta till att ge vägledning för prioriteringar genom att indikera i vilka delområden och i vilka typer av projekt forskningsbidrag har störst verkningsgrad. Prioriteringsfrågor är naturligtvis alltid svåra och viktiga men här får man hoppas att panelen inte fastnar i dem utan istället noterar det jämförelsevis (historiskt och relativt andra ämnen) lilla totalbelopp som utgår från VR till matematisk forsking och först och främst drar slutsatsen att, mot bagrund av den goda kvalité svensk matematisk forskning håller, totalbeloppet bör ökas.

Den 19–27 augusti äger internationella kongressen ICM rum i Hyderabad, Indien. Sverige representeras av fyra delegater i kongressen: Nils Dencker (fd samfundsordförande och föredragshållare i analyssektionen vid kongressen), Ulla Dinger, Torbjörn Lundh och Mikael Passare (vice samfundsordförande).

Ett par ekonomirelaterade spörsmål förtjänar uppmärksamhet: Först, samfundets bokslut för 2009/10 som återfinns på sidorna 91-93. Sedan, det mycket välkomna bidrag som Stiftelsen Olle Engkvist Byggmästare har gett samfundets tävlingskommitté. I och med detta bidrag är finansieringen för skolornas matematiktävling säkrad för den nära framtiden. (På lång sikt vore det naturligtvis önskvärt att hitta en fastare finansieringsform för denna för samfundet så viktiga aktivitet.) I samband med detta vill jag rikta tack till samfundets skattmästare Milagros Izquierdo för arbetet med bokslutet och till tävlingskommittens ordförande Dag Jonsson för arbetet med ansökan för matematiktävlingens räkning.

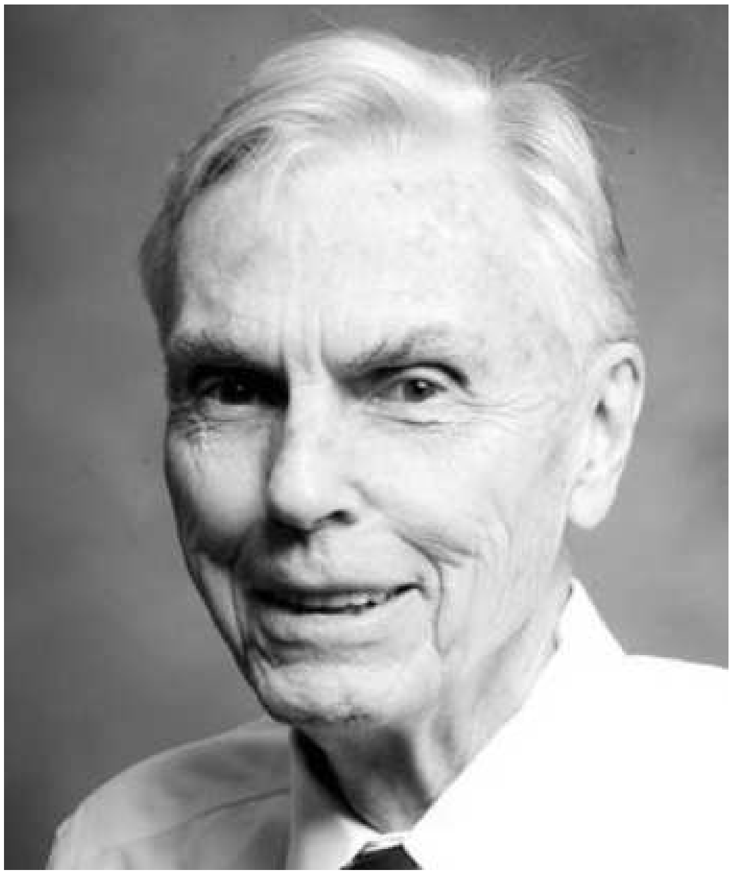
Avslutningsvis vill jag blicka framåt mot hösten. Som jag skrev om i förra Utskicket kommer den första svensk-katalanska matematikkonferensen att hållas den 16–18 september i Barcelona. Samfundets höstmöte 2010 kommer att äga rum i samband med denna konferens. En glädjande nyhet i sammanhanget är att GS Magnussons stiftelse beviljat en ansökan från samfundet som tillåter oss att finansiera resor för samtliga 24 svenska talare. För mer information kring detta hänvisas till hemsidan.

---

[2] Se även Anders Björners artikel på sidan 72[red.anm.]

Symposium:

A celebration of the Abel Prize laureate 2010, John Torrence Tate



John Tate from University of Texas at Austin receives the Abel Prize 2010 from the Norwegian Academy of Science and Letters *for his vast and lasting impact on the theory of numbers.* The purpose of this symposium is to celebrate John Tate and his mathematical achievements. Beginning with his groundbreaking 1950 thesis he is responsible for an astounding number of fundamental mathematical notions and results, centering around the areas of algebraic number theory and arithmetic algebraic geometry, such as Tate cohomology, the Tate duality theorem, Barsotti-Tate groups, the Tate motive, the Tate module, Tate's algorithm, Lubin-Tate formal groups, rigid analytic spaces, the Néron-Tate height, Mumford-Tate groups, the Hodge-Tate decomposition, the Tate isogeny theorem, the Honda-Tate theorem, Serre-Tate deformation theory, Tate-Shafarevich groups, the Tate conjecture, Tate resolutions and the Sato-Tate conjecture.

Time and place:

31 May 2010, 13:30
Beijersalen
The Royal Swedish Academy of Sciences
Lilla Frescativägen 4 A, Stockholm

Schedule:

13:30 Opening of the symposium
Bo Berndtsson,
chairman of the Academy's Class for mathematical sciences

13:35 Introduction - The Abel Prize

Kristian Seip, Norwegian University of Science and Technology,
Chairman of the Abel Prize Committee

13:50 Applications of Tate's work in cryptography
Johan Håstad, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm

14:20 The Arithmetic of Elliptic Curves
John Tate, University of Texas at Austin

15:10 Coffee

15:40 Point count statistics for families of curves over a fixed finite field
Pär Kurlberg, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm

16:20 Detecting elements in the Grothendieck ring of varieties
Torsten Ekedahl, Stockholm University

17:00 End of Symposium

An event hosted by the Academy's Class for mathematical sciences and Institut Mittag-Leffler

On Abel prize Laureate John Tate's work

Pär Kurlberg

1 Introduction

On May 25 2010, John Tate will receive the Abel prize in Oslo "for his vast and lasting impact on the theory of numbers"; according to the committee, "Many of the major lines of research in algebraic number theory and arithmetic geometry are only possible because of the incisive contributions and illuminating insights of John Tate. He has truly left a conspicuous imprint on modern mathematics."

This is a brief and admittedly incomplete account of Tate's work; to make it reasonably short yet suitable for a general audience we shall concentrate on his work related to elliptic curves (but even with this restriction there will be some notable omissions, e.g., Tate curves, Lubin-Tate formal groups, and Tate's algorithm for minimal models.) The theory of elliptic curves is of absolutely central importance in modern number theory; not only is it a venerable, very beautiful, and significant theory on its own right, but it has also found striking applications to seemingly unrelated areas, e.g., its key role in the resolution of Fermat's last theorem. Tate's contributions in this area are numerous, yet both deep and profound — his influence on the development of the subject cannot be overstated.

2 Background on elliptic curves

For simplicity, by an elliptic curve E we will mean the set of solutions of a certain equation $y^2 = f(x)$, along with a "point at infinity", i.e.,

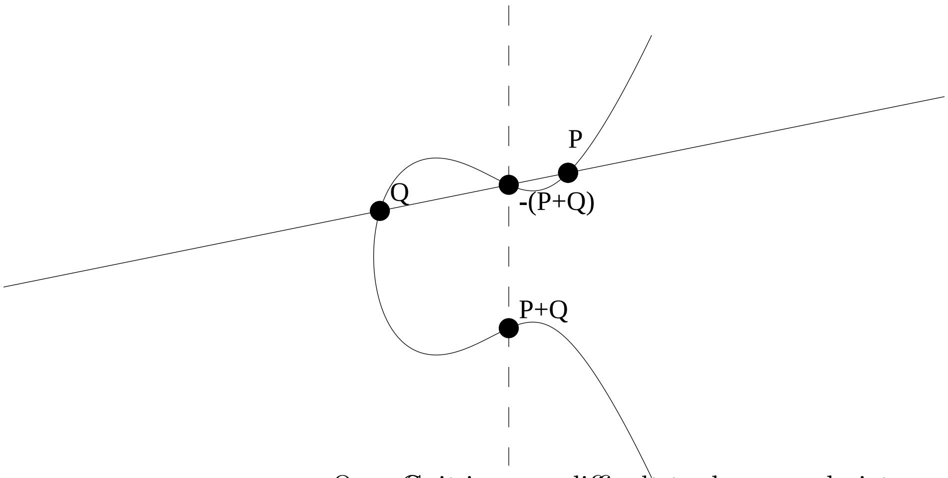
$$E := \{x, y : y^2 = f(x)\} \cup \{\infty\}$$

where f is a monic cubic polynomial with *distinct* roots. (The point at infinity is best understood via projective coordinates; we refer the interested reader to Silverman's book "The Arithmetic of Elliptic Curves" for more information.) What makes elliptic curves special are that they are *curves*, in the sense of algebraic geometry, and that they come with an abelian *group law* given by rational functions. Given a field K, we will by $E(K)$ denote the set of K-rational points[3]

$$E(K) := \{x, y \in K : y^2 = f(x)\} \cup \{\infty\}$$

Over the reals, we can illustrate the group law with the following customary pictures

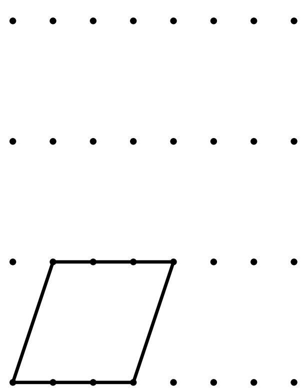
[3] This of course only works if there is a natural way to view f as an element of $K[x]$.

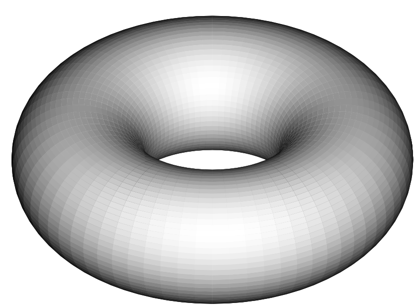


Over $\mathbb{C}$, it is more difficult to draw good pictures, but on the other hand, we have a (complex analytic) isomorphism

$$E(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}/L$$

where $L \subset \mathbb{C}$ is a *lattice*, e.g., $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$. The group law is then the obvious one, namely $z_1 \oplus z_2 = (z_1 + z_2) \mod L$.





It is rather remarkable that for *any* lattice L, $\mathbb{C}/L$ has the structure of an algebraic curve. (Hint: starting with a lattice L, write down the corresponding Weierstrass $\mathfrak{P}$-function $\mathfrak{P}(z) := 1/z^2 + \sum_{\omega \in L: \omega \neq 0} (1/(z-\omega)^2 - 1/\omega^2))$; the map from $\mathbb{C}/L$ to $E(\mathbb{C})$ is then given by $z \to (\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$.)

For *abelian varieties*, to be thought of as higher dimensional analogues of elliptic curves, we similarly have $A(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^d/L$ where L is a lattice of full rank; however in this setting stronger conditions on L are needed in order for $A(\mathbb{C})$ to have the structure of a variety. (Roughly speaking, it must be possible to define a Hermitian form whose imaginary part, restricted to L, takes integer values.)

3 Arithmetic of elliptic curves

From the perspective of number theory, the fundamental question is: what is $E(\mathbb{Q})$? Also of importance is the structure of $E(\mathbb{F}_p)$ where $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ is the finite field with p elements.

For $E(\mathbb{Q})$, we have the following fundamental result:

Theorem 1 (Mordell, 1922) *$E(\mathbb{Q})$ is finitely generated.*

In particular, as a group,

$$E(\mathbb{Q}) \simeq E(\mathbb{Q})_{\text{torsion}} \oplus \mathbb{Z}^r$$

where $E(\mathbb{Q})_{\text{torsion}}$ is the subgroup of points of finite order, and r is known as the *rank* of E.

By a theorem of Mazur, we know that $|E(\mathbb{Q})_{\text{torsion}}| \leq 16$ for any elliptic curve defined over $\mathbb{Q}$ (i.e., $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$.) Moreover, in terms of determining the torsion part precisely (i.e., finding generators), the situation is completely understood.

On the other hand, the free part, in particular the rank, is much less well understood. A folklore conjecture assert that the rank can be arbitrarily large, but currently the record is Elkies' example of a curve of rank $r \geq 28$. As evidence for the conjecture, it is worth mentioning that the conjecture holds[4] for elliptic curves defined over $\mathbb{F}_p(t)$ — a famous result by Tate and Shafarevich from 1967. (In many ways $\mathbb{F}_p(t)$ is "similar" to $\mathbb{Q}$, e.g., their corresponding "rings of integers" $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ and $\mathbb{F}_p[t] \subset \mathbb{F}_p(t)$ are both Dedekind rings.)

3.1 The local to global (Hasse) principle

In order to study $E(\mathbb{Q})$ we might hope to gain information by reducing the equation modulo a prime p. For example, if there are no (non-trivial) points modulo p for some prime p — i.e., if $E(\mathbb{F}_p) = \{\infty\}$ for some p, then certainly[5] $E(\mathbb{Q}) = \{\infty\}$.

For example, given $a, b, c \in \mathbb{Z}$, does

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \tag{3.1}$$

have a *nontrivial* rational solution? The Hasse principle asserts that (3.1) having a $\mathbb{Q}$-solutions is equivalent to (3.1) having a real solution *and* that (3.1) has a $\mathbb{Q}_p$-solution for all primes p, where $\mathbb{Q}_p$ is the field of p-adic numbers. However, the local-global principle does not extend to cubics! For instance, as Selmer showed, the equation

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0 \tag{3.2}$$

[4] Recently D. Ulmer extended this to the "non-isotrivial" case.

[5] In order to avoid troubles with p dividing denominators, we really should be working projectively.

trivially has lots of real solutions, and it has $\mathbb{Q}_p$-solutions for all p, yet it has no (nontrivial) $\mathbb{Q}$-solution! Moreover, (3.2) is an elliptic curve "in disguise", so unfortunately the Hasse principle is not applicable in our setting.

However, quite remarkably, it will turn out that information about $|E(\mathbb{F}_p)|$ for all p still says quite a lot about $E(\mathbb{Q})$; we shall return to this in Section 7.

4 Elliptic curves over finite fields

We next turn to the question of the structure of $E(\mathbb{F}_p)$. Since each choice of x-coordinate gives at most two y-solutions, and there is one point at infinity, we find that $|E(\mathbb{F}_p)| \leq 2p+1$. In particular $E(\mathbb{F}_p)$ is finite, and all points are torsion points. Basic questions are thus: how large is $|E(\mathbb{F}_p)|$, and what is the structure of $E(\mathbb{F}_p)$ as a group?

As for the second question, let $n = |E(\mathbb{F}_p)|$. Now, *if* we can find an embedding $\alpha : E(\mathbb{F}_p) \to E(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}/L$, we obtain

$$\operatorname{im}(\alpha) \subset \frac{1}{n}L/L \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

since the group of n-torsion points in $E(\mathbb{C})$ is nothing but $\frac{1}{n}L/L$. Hence $E(\mathbb{F}_p)$ has at most two generators; one easily gets that $E(\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$ where $n_1|n_2$ and $n_1n_2 = n$, so in a sense $E(\mathbb{F}_p)$ is "two dimensional". However, embedding $E(\mathbb{F}_p)$ into $E(\mathbb{C})$ is problematic to say the least, but as we shall see, there is a way to recover this intuition for $E(\overline{\mathbb{F}_p})$, where $\overline{\mathbb{F}_p}$ is the algebraic closure of $\mathbb{F}_p$.

4.1 The Tate module

Given an integer $n \geq 1$, denote by $E[n]$ the subgroup of n-torsion points of $E(\overline{\mathbb{F}_p})$;

$$E[n] := \{P \in E(\overline{\mathbb{F}_p}) : nP = 0\}.$$

A basic fact about the torsion points is that $E[n] \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ provided that p does not divide n.

Given a prime $l \neq p$, we define the *Tate module* as an inverse limit of l^k-torsion points of E, i.e.,

$$T_l(E) := \varprojlim_{k \geq 0} E[l^k].$$

Since $E[l^k] \simeq \mathbb{Z}/l^k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l^k\mathbb{Z}$, we find that $T_l(E) \simeq \mathbb{Z}_l \times \mathbb{Z}_l$, where $\mathbb{Z}_l \subset \mathbb{Q}_l$ is the ring of l-adic integers. More generally, for A an abelian variety of dimension n, the Tate module $T_l(A)$ can be defined in a similar fashion; in this case $T_l(A) \simeq \mathbb{Z}_l^{2n}$ provided A is defined over $\mathbb{F}_p$ and $l \neq p$. (In the case $l = p$, more structure is preserved by taking the inductive limit; this construction leads to what is known as Barsotti-Tate groups.)

Remark: The Galois group $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ acts on the l^k-torsion points $E[l^k]$ for each $k \geq 0$; these actions are sufficiently compatible to allow us to define an action of G on the Tate module $T_l(E)$ itself. Further, this action gives rise to a Galois representation $\rho : G \to GL_2(\mathbb{Q}_l)$ which, since $\mathbb{Q}_l$ has characteristic zero, is more pleasant to treat than the Galois representations $\rho' : G \to GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ obtained by letting G act on $E[n]$. The theory of two dimensional Galois representations arising via action on the Tate module is extremely rich, and a detailed study of the properties of such representations is at the heart of the Taylor-Wiles proof of the Taniyama-Shimura conjecture.

Have we lost anything by passing to characteristic zero? As Tate conjectured in 1964, and consequently proved, the answer is no — the Tate module "sees everything"!

Theorem 2 (Tate, 1966) *Let A_1, A_2 be abelian varieties defined over $\mathbb{F}_p$, and let $l \neq p$ be a prime. Let $\hom_{\mathbb{F}_p}(A_1, A_2)$ be the ring of $\mathbb{F}_p$-rational isogenies*[6]*, and let $\hom_{\mathbb{F}_p}(T_l(A_1), T_l(A_2))$ be the ring of $\mathbb{Z}_l$ linear maps which commute with the action of G. Then*

$$\hom_{\mathbb{F}_p}(A_1, A_2) \otimes \mathbb{Z}_l \simeq \hom_{\mathbb{F}_p}(T_l(A_1), T_l(A_2)).$$

For a a decisive consequence of this important result, see Theorem 3. Further, it is worth noting that the proof of the Tate conjecture for number fields was the starting point for Falting's famous proof of the Mordell conjecture, namely that $|C(\mathbb{Q})| < \infty$ if C is curve of genus $g > 1$.

5 Point counting via Frobenius acting on $T_l(E)$

Let E be an elliptic curve defined over $\mathbb{F}_p$. Consider the Frobenius action $\phi : E(\overline{\mathbb{F}_p}) \to E(\overline{\mathbb{F}_p})$ defined as follows: given a point $P = (x, y) \in E(\overline{\mathbb{F}_p})$, let $\phi(P) = (x^p, y^p)$. (For ϕ to map E into itself, it is essential that E is defined over $\mathbb{F}_p$.) Using the Frobenius map, we obtain

$$|E(\mathbb{F}_p)| = \ker(\phi - 1) = \deg(\phi - 1)$$

where $\deg(\phi - 1)$ is the degree of $\phi - 1$ as a rational map. Further, if we let f_E be the characteristic polynomial[7] of the the action of ϕ on $T_l(E)$, it can be shown that

1. $f_E(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) \in \mathbb{Z}[x]$. It is by no means obvious that $f_E(x)$ not only is independent of l, but also has integer coefficients!

[6] An isogeny $\alpha : A_1 \to A_2$ is a group homomorphism given by a rational map with the property that α is onto and has finite kernel. In the lattice model for elliptic curves over $\mathbb{C}$, an isogeny between $\mathbb{C}/L_1$ and $\mathbb{C}/L_2$ is just given by multiplication by $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ such that $\alpha L_1 \subset L_2$.

[7] Since ϕ acts on $T_l(E) \simeq \mathbb{Z}_l^2$ in a linear fashion, ϕ can be viewed as an element of $GL_2(\mathbb{Q}_l)$.

2. $|\alpha| = |\overline{\alpha}| = p^{1/2}$. This is the "Riemann hypothesis for elliptic curves over finite fields", conjectured by E. Artin, and proven by Hasse.

3. $\deg(\phi - 1) = f_E(1)$.

Thus,

$$|E(\mathbb{F}_p)| = 1 - (\alpha + \overline{\alpha}) + \alpha \cdot \overline{\alpha} = 1 - a_p + p$$

where $|a_p| = |\alpha + \overline{\alpha}| \leq 2\sqrt{p}$, known as the *Hasse bound*. In other words, the number of points on $E(\mathbb{F}_p)$ is roughly equal to $p+1$, with an error term of size $p^{1/2}$. Intuitively, we may think of $\phi|_{T_l(E)}$ as conjugate to a diagonal matrix $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, and $a_p = \text{Trace}\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\right)$.

6 Some remarks on Abelian varieties

If A is an abelian variety, define $T_l(A)$ as before, and let $f_A(x)$ be the characteristic polynomial of the Frobenius action on $T_l(A)$. Then, by the Riemann hypothesis for abelian varieties over finite fields (Weil, 1948),

1. $f_E(x) = \prod_{i=1}^{2d}(x - \alpha_i) \in \mathbb{Z}[x]$.

2. $|\alpha_i| = p^{1/2}$ for all i.

3. $|A(\mathbb{F}_p)| = \deg(\phi - 1) = f_A(1) = \prod_i (1 - \alpha_i)$.

Now, $f_A(x)$ is certainly a nice invariant of A, but exactly how much does it capture? According to Tate's celebrated isogeny theorem, quite a lot!

Theorem 3 (Tate, 1966) *Let A, B be abelian varieties defined over $\mathbb{F}_p$, and let $f_A(x), f_B(x)$ the the corresponding characteristic polynomials of the Frobenius action on the associated Tate modules. Then A, B are isogenous if and only if $f_A(x) = f_B(x)$. Moreover, A is irreducible (in a certain sense) if and only if $f_A(x)$ is irreducible as a polynomial in $\mathbb{Z}[x]$.*

An easy corollary for elliptic curves is then that E_1, E_2 are isogenous over $\mathbb{F}_p$ if and only if $|E_1(\mathbb{F}_p)| = |E_2(\mathbb{F}_p)|$.

6.1 Weil integers and Honda-Tate theory

Let α_1 be an algebraic integer with minimal polynomial $f(x) = \prod_{i=1}^{d}(x-\alpha_i)$. We say that α_1 is a p-*Weil integer* if $|\alpha_i| = p^{1/2}$ for all i. (In other words, α_1 is an algebraic integer, all whose conjugates have absolute value $p^{1/2}$.) An obvious way to write down p-Weil integers is to consider roots of $f(x) = x^{2d} - p^d$. Challenge: can you find another way to write down, say a degree ten, p-Weil integer? As we have seen, a not so obvious way is to start with an Abelian variety over $\mathbb{F}_p$, and find a root of its characteristic polynomial, but surely there must be an easier way!? The answer is: no!

Theorem 4 (Honda-Tate) *The set of irreducible Abelian varieties A defined over $\mathbb{F}_p$, modulo isogenies, is in bijective correspondence with the set of p-Weil integers, modulo Galois conjugacy.*

In other words, *all* p-Weil integers come from Abelian varieties!

7 The local-global principle revisited: elliptic curve L-functions and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture

Given an elliptic curve defined over $\mathbb{Z}$, say $E = \{x, y : y^2 = x^3 + 5x\}$, let us try to gain information about $E(\mathbb{Q})$ by studying the reduction of E modulo p, i.e., looking at $E(\mathbb{F}_p)$ for all[8] primes p. As the example by Selmer shows, we cannot hope to obtain non-trivial points on $E(\mathbb{Q})$ by finding points modulo p for all primes p. However, we will (conjecturally) get quite a lot of information from the knowledge of $|E(\mathbb{F}_p)|$ for all p.

From the Riemann hypothesis for elliptic curves over $\mathbb{F}_p$, we may write

$$|E(\mathbb{F}_p)| = p + 1 - a_p$$

where $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$. The fluctuations are thus given by a_p, and it is natural to study how $a_p/\sqrt{p} \in [-2, 2]$ varies as we vary the prime p. Lacking any other information, one might hazard to guess that $\{a_p/\sqrt{p}\}_p$ would be uniformly distributed in $[-2, 2]$. However, this turns out to be quite far from the truth:

Conjecture 5 (Sato-Tate) *If E is an elliptic curve defined over $\mathbb{Z}$, and E is generic*[9]*, then, as $p \to \infty$,*

$$\frac{|\{p \leq x : a_p/\sqrt{p} \in [t_1, t_2]\}|}{|\{p \leq x\}|} \sim \mu_{Haar}\left(\{g \in SU_2(\mathbb{C}) : \mathrm{Trace}(g) \in [t_1, t_2]\}\right)$$

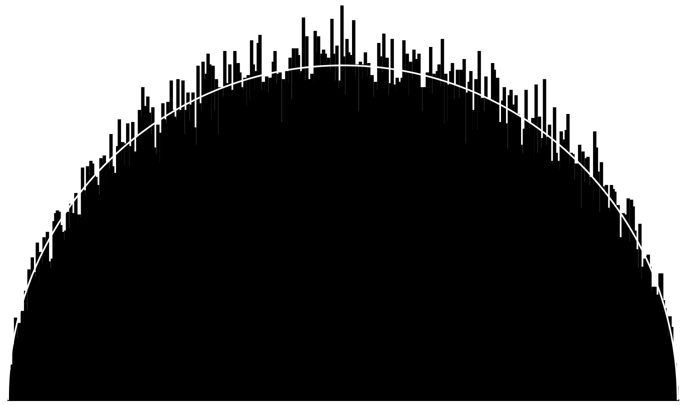
where μ_{Haar} is the Haar measure on $SU_2(\mathbb{C})$, normalised so that

$$\mu_{Haar}(SU_2(\mathbb{C})) = 1$$

.

[8] We need to be a little careful: reducing $y^2 = x^3 + 5x$ modulo 5 yields the curve $y^2 = x^3$ which is *not* an elliptic curve. However, as long as we avoid finitely many "bad" primes, the reduction modulo p will yield an elliptic curve over $\mathbb{F}_p$.

[9] E must not have "complex multiplication".



The case of $y^2 = x(x^2-1) + 1$, primes up to 10^6

Sato and Tate formulated this famous and very influential conjecture independently of each other; Sato based it on numerical experiments, Tate on his deep conjectures on the connections between algebraic cycles on varieties and zeros/poles of certain associated L-functions. To give an indication of why $SU_2(\mathbb{C})$ comes into play, recall that a_p can be interpreted as

$$\mathrm{Trace}\left(\begin{pmatrix}\alpha_p & 0\\ 0 & \overline{\alpha_p}\end{pmatrix}\right) \quad \text{where} \quad |\alpha_p| = |\overline{\alpha_p}| = p^{1/2}$$

Hence

$$a_p/\sqrt{p} = \mathrm{Trace}\left(\begin{pmatrix}\gamma_p & 0\\ 0 & \overline{\gamma_p}\end{pmatrix}\right)$$

which, since $|\gamma_p| = |\overline{\gamma_p}| = 1$ is the trace of a unitary matrix with determinant one. In other words, to each prime p, we can associate a matrix (or perhaps a conjugacy class) in $SU_2(\mathbb{C})$, and a natural generalization of Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions (or the Chebotarev density theorem), is that these conjugacy classes should be equidistributed with respect to a natural measure on the group, namely the Haar measure. We note that the Sato-Tate conjecture was recently proven for "most"[10] elliptic curves by R. Taylor.

Remark: The Sato-Tate distribution is known in the physics literature as Wigner's "semi-circle distribution". Wigner's semi-circle law asserts that the spectral density of eigenvalues of random symmetric matrices (of *large* dimension), appropriately scaled, is given by the area below a semi-circle. By "accident", we have

$$\mu_{\mathrm{Haar}}\left(\{g \in SU_2(\mathbb{C}) : \mathrm{Trace}(g) \in [t_1, t_2]\}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

Thus, quite remarkably, the spectral density of *large* dimensional matrices is related to the Haar measure on the *low* dimensional matrix group $SU_2(\mathbb{C})$!

[10] Curves with "multiplicative reduction" at some prime.

In order to obtain a "global" object, we "glue" the a_p-data into an L-function: given an elliptic curve defined over $\mathbb{Z}$, define an associated L-function $L(E,s)$ by

$$L(E,s) := \prod_{p \nmid N} (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1} \cdot \prod_{p \mid N} (1 - a_p p^{-s})^{-1}$$

where N is the product of all "bad primes" (with certain exponents.)

By the Hasse bounds, $L(E,s)$ is analytic for $Re(s) > 3/2$, but we can do much better: by the Taniyama-Shimura conjecture, now known as the modularity theorem (proved by Wiles, Taylor, Breuil, Conrad, Diamond), *any* elliptic curve is modular, i.e., $L(E,s) = L(f,s)$ for f a certain modular form, and consequently $L(E,s)$ has analytic continuation to the whole plane "for free".

Now, $L(E,s)$ also has, similar to Riemann's zeta function, a functional equation: if we define a "completed" L-function

$$L^*(E,s) := N^{s/2}\Gamma(s)(2\pi)^{-s}L(E,s)$$

then $L^*(E,s)$ satisfies the functional equation

$$L^*(E,s) = \pm L^*(E, 2-s).$$

One of the many miracles of L-functions is that their values at special points, either at the edge, or at the center, of the critical strip, often carry a lot of arithmetic information. For elliptic curve L-functions, the center of the critical strip is at $s = 1$, and we have the following fundamental conjecture.

Conjecture 6 (Birch, Swinnerton-Dyer) *There exists $c = c(E) \neq 0$ such that*

$$L^*(E,s) = c \cdot (s-1)^r + (\textit{higher order terms})$$

where r is the **rank** *of $E(\mathbb{Q})$.*

A stronger form of the conjecture interprets c in terms of further arithmetic data related to E, namely that

$$c = \frac{|\text{Ш}| \cdot R \cdot \Omega}{|E_{\text{torsion}}(\mathbb{Q})|^2} \cdot \prod_{p \mid N} \omega_p \tag{7.1}$$

where:

- ω_p are certain well understood integers associated with the set of "bad" primes.
- $\Omega = \int_{E(\mathbb{R})} |\omega|$ is a "period integral" of the invariant differential ω on E.

- Ш is the Shafarevich-Tate group — only conjecturally known to be finite! (Though, if finite, Cassels showed that its order must be a square.)

- R is the regulator of E and given by

$$R = \det\left((\langle P_i, P_j \rangle)_{i,j=1}^r \right)$$

  where $P_1, \dots, P_r$ is a basis for the free part of $E(\mathbb{Q})$, and $\langle -, - \rangle$ is the so called Neron-Tate pairing on $E(\mathbb{Q})_{\text{free}} \otimes \mathbb{R}$ (see section 7.1 for more details.)

Resolving the conjecture is considered to be one of the most important open problems in mathematics — it is in fact one of the Clay Millennium prize problems (hence worth one million dollars!), and a testament of Tate's influence on the subject is that two of the quantities on the right hand side of (7.1) bears his name.

When originally made (based on computer calculations), the conjecture was quite amazing — in the words of Tate, "This remarkable conjecture relates the behavior of a function L at a point where it is not at present known to be defined to the order of a group (Sha) which is not known to be finite!". By the modularity theorem, we now know that $L(E, s)$ is indeed defined at $s = 1$, but the Shafarevich-Tate group remains quite mysterious. Ш can either be defined via Galois cohomology as $Ш = \cap_v \ker\left(H^1(G, E) \to H^1(G_v, E_v)\right)$, where v ranges over all completions[11] of $\mathbb{Q}$, $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ and $G_v = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_v}/\mathbb{Q}_v)$; in which case at least Ш being a group is clear. Alternatively, a more geometric description is to view Ш as the set of homogenous spaces of E, having points in all completions $\mathbb{Q}_v$ (modulo a certain equivalence); a way to think of Ш is then as a certain way to measure the failure of the local-global principle.

There is plenty of evidence and partial results for the conjecture, but the situation when $r \geq 2$ is poorly understood. However, for elliptic curves over $\mathbb{F}_p(t)$, M. Artin and Tate showed that if the rank is r, then the order of vanishing at $s = 1$ is at least of order r. Further, another major piece of evidence for the strong form of the conjecture is Tate's proof that it holds for "isotrivial" elliptic curves over $\mathbb{F}_p(t)$.

7.1 Remarks on canonical heights

Given a rational point $P = (x, y) \in E(\mathbb{Q})$, we may measure the "arithmetic complexity" of P as follows: write $x = u/v$ where $(u, v) = 1$, and define the "naive height" of P as

$$h(P) = \log(\max(|u|, |v|)).$$

[11] I.e., either $\mathbb{Q}_v = \mathbb{Q}_p$ for $v = p$ prime, or $\mathbb{Q}_v = \mathbb{R}$ for $v = \infty$.

The problem is that h depends on many choices — why not use the y-coordinate instead? Or more generally, why not take some rational function $\alpha : E(\mathbb{Q}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, write $\alpha(P) = u/v$ and define $h_\alpha(P) = \log(\max(|u|, |v|))$?

By a careful choice of "local heights" $\hat{h}_v$, Neron defined a canonical global height $\hat{h}(P) = \sum_v \hat{h}_v(P)$ having the following important properties: $n \to \hat{h}(nP)$ is a quadratic function, and $\hat{h}(P) - h(P)$ is bounded for h any "naive" height function. Tate, on the other hand, directly defined a global height in an ingeniously simple way — bring in the group law, scale appropriately, then take limits:

$$\hat{h}(P) := \lim_{n\to\infty} \frac{h_\alpha(nP)}{n^2 \cdot \deg(\alpha)}$$

The *Neron-Tate* canonical height does *not* depend on α, and has the following properties: for all $P \in E(\mathbb{Q})$,

- $\hat{h}(nP) = n^2 \cdot \hat{h}(P)$,
- $\hat{h}(P) = 0$ if and only if $P \in E_{\text{torsion}}(\mathbb{Q})$,
- $\hat{h}(P) \geq 0$.

In particular, $\hat{h}$ is a positive definite quadratic form on $E(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{R}$, and this allows us to define a "size" on the elements of $E_{\text{free}}(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}^r$. (This is really rather remarkable: if a point P has infinite order, the group generated by P embeds *densely* in one of the components of $E(\mathbb{R})$; note that $E(\mathbb{R})$ is either isomorphic to S^1 or $S^1 \times S^1$. In other words, the height function allows us to put a nice Euclidean structure on something that a-priori is very naturally embedded into S^1, or $S^1 \times S^1$ in a dense fashion!)

Given the height function, the *Neron-Tate pairing* is simply given by

$$\langle P, Q \rangle := \hat{h}(P + Q) - \hat{h}(P) - \hat{h}(Q).$$

Note that for the regulator R occurring in (7.1) to be well defined, it is absolutely essential that the height pairing is independent of any choices.

Acknowledgements: I am grateful to J. Brzezinski, U. Persson, I. Wigman, and Z. Rudnick for their comments on an early draft of the article. I am also indebted to U. Persson for the illustrations.

John Tate

årets Abelprisvinner - en ung students erindringer

Loren D. Olson

Jeg vil her dele med dere noen minner fra min studenttid med John Tate som foreleser. John Tate ble født i 1925. Han tok sin bachelorgrad på Harvard og senere doktorgraden på Princeton. John Tate ble professor på Harvard i 1954. Jeg var undergraduate student på Harvard fra 1960 til 1964. Da jeg kom til Harvard som 17-åring, var det med stor spenning at jeg stilte til intevju med Prof. John Tate. En student som ville komme inn på kurs Math-11 (Honors Calculus) måtte nemlig ha et intervu med foreleseren. Han spurte meg hvor jeg kom fra. Jeg svarte "Grand Forks, ND". Da smilte Tate og sa "Det er ikke så langt fra der jeg vokste opp, Minneapolis, MN". Bakgrunn fra Midtvesten var nok ikke utslagsgivende men jeg kom ihvertfall med på kurset.

Kurset var nokså stringent med Courants 2-binds verk "Differential and Integral Calculus" som pensum. Fra det første semesteret med John Tate, er det én episode som står spikret hos meg. En student stilte et håpløst spørsmål. Tate snudde seg mot tavla, hamret løs på den med begge knyttenevene og ropte "You can't do that! Each number has its own personality!!". Da skjønte jeg hvilket forhold han hadde til matematikk: personlig og altoppslukkende.

Et par år senere tok jeg et helårskurs i kompleks analyse. Læreboka var Cartans "Theory of Analytic Functions". Den er vinklet mot en algebraisk tankesett, noe som passet Tate (og meg!) godt. Mange som tok kurset valgte algebra som hovedretning.

Mitt siste år på Harvard ga meg anledning til å ta et lesekurs i et nærmest valgfritt emne i matematikk. Jeg valgte Nagatas "Local Rings" med John Tate som mentor. Vi hadde møter med ujevne mellomrom der jeg fikk oppklart vanskelige punkter, og der han ga meg geometriske fortolkninger av forskjellige begrep.

Da jeg var graduate student på Columbia, dukket det opp et brev fra Tate til Cassels (datert 25 sept 1965). En stor del av dette brevet er senere blitt publisert som: ([1]) i 1973. På midten av 60-tallet var det et strev å få kopiert artikler. Dette brevet var gull verdt for en student som meg som drev med elliptiske kurver. Serge Lang var på Columbia og jeg fikk hjelp av ham fra tid til annen. En dag stakk Lang til meg noe som het "Galois cohomology of abelian varieties over p-adic fields" med kommentaren: "Her, les dette!". Det var noe som Tate ([2]) hadde gjort, men som Lang hadde skrevet opp.

Bortsett fra å formidle en personlig erfaring med Tate som professor, er det et poeng for meg her å vise at Tates resultater var kjente og sirkulerte i student- og forskermiljøet i lang tid før de ble allment kjente og publiserte. Arbeidet hans var kjent og benyttet allerede fra 50-tallet.

Det var en klok og riktig avgjørelse å gi Abelprisen for 2010 til John T. Tate. Prof. Tate mottar prisen for sitt betydningsfulle og mangfoldige virke innenfor tallteori og aritmetisk algebraisk geometri. Han har påvirket flere store matematiske fagfelt over lang tid.

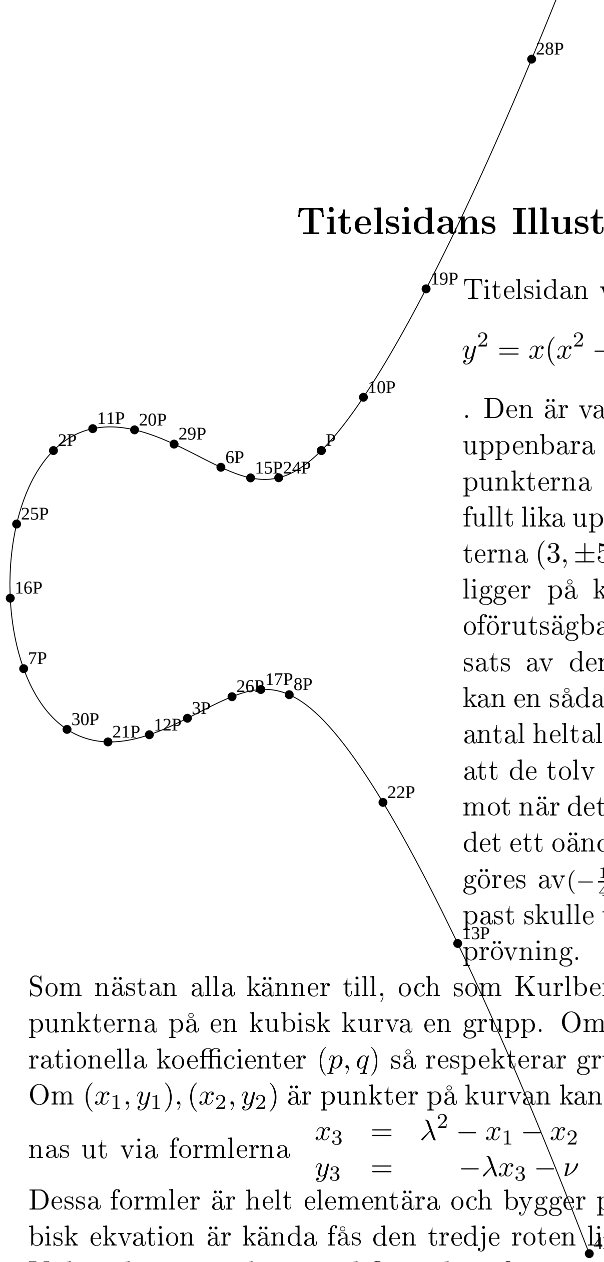
Prisen er i det store og hele en personlig hyllest til en stor forsker, men den er også en inspirasjon til matematikere som skal videreføre fagfeltene.

References

[1] Tate, J. *Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil.* in: Modular Functions of One Variable IV. Edited by B. J. Birch and W. Kuyk. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 476. Springer-Verlag, 1975.

[2] Tate, J. *Galois cohomology of abelian varieties over p-adic fields.* Mimeographed notes by Serge Lang.

Department of Mathematics and Statistics,
University of Tromsø, N-9037 Tromsø, Norway
email: loren.olson@uit.no



Titelsidans Illustration

Titelsidan visar kubiken

$$y^2 = x(x^2 - 1) + 1$$

. Den är vald sådan att den har en massa uppenbara heltals lösningar som de sex punkterna $(\pm 1, \pm 1), (0, \pm 1)$. Andra inte fullt lika uppenbara heltalslösningar är punkterna $(3, \pm 5), (5, \pm 11)$. Att även $(56, \pm 419)$ ligger på kubiken må upplevas som ett oförutsägbart kuriosum. Enligt en känd sats av den norske matematikern Thue, kan en sådan ekvation endast ha ett ändligt antal heltalslösningar. Jag misstänker starkt att de tolv uppräknade är de enda. Däremot när det gäller rationella lösningar finns det ett oändligt antal. En typisk sådan utgöres av$(-\frac{164914877}{419061841}, \frac{9902960463475}{8578614947111})$ som knappast skulle upptäckas medelst systematisk prövning.

Som nästan alla känner till, och som Kurlberg påpekar i sin artikel, utgör punkterna på en kubisk kurva en grupp. Om kurvan $y^2 = x^3 + px + q$ har rationella koefficienter (p, q) så respekterar grupp-lagen rationella lösningar. Om $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ är punkter på kurvan kan deras summa (x_3, y_3) lätt räknas ut via formlerna $\begin{array}{rcl} x_3 & = & \lambda^2 - x_1 - x_2 \\ y_3 & = & -\lambda x_3 - \nu \end{array}$ där $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \nu = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$. Dessa formler är helt elementära och bygger på att om två rötter till en kubisk ekvation är kända fås den tredje roten linjärt från koefficienten för x^2. Vidare kan man lätt modifiera dem för att även inkludera fallet $x_2 = x_1$. (Formlerna brukar återfinnas i de flesta elementära läroböcker om elliptiska kurvor, en standardreferens är den tidigare nämnda boken av Silverman.).

Ur detta ser vi speciellt att ur två lösningar kan vi generera en tredje. De inledningsvis nämnda lösningarna utgör en del av ett oändligt pärlband. Tar vi som utgångspunkt punkten $P = (1, 1)$ finner vi successivt $2P = (-1, 1), 3P = (0, -1), 4P = (3, -5), 5P = (5, 11) \ldots$ medan $-P = (1, -1), -2P = (-1, -1), -3P = (0, 1), -4P = (3, 5), -5P = (5, -11) \ldots$. Om vi bara är intresserad av punkternas approximativa lägen (säg för grafning) kan vi lätt skriva ner en rutin som spottar ut tusentals punkter. (Dock så småningom kommer de små felen att ackumuleras och de plottade punkterna kommer att ha föga med kurvan att göra.). Är vi däremot intresserad av de exakta rationella värdena får vi ett litet problem. Sätter vi in dessa i formlerna ser vi att täljarnas och nämnarnas storlek kommer att växa snabbt (i den aktuella jargongen talar vi om att de rationella talen får höga höjder). Visserligen kommer de att ha höga gemensamma faktorer, men dessa måste räknas fram och divideras med för att inte det hela skall växa oss överhuvud och bli helt oöverskådligt. För tabellen nedan har jag designat 'listor' (arrays) av tal för att kunna nå utöver de futtiga begränsningar som standardimplementationerna (säg i C) erbjuder. Det är klumpigt att göra aritmetik med listor, och ett välkänt knep är att göra operationerna modulo ett antal primtal och sedan använda den explicita lösningen till kinesiska restsatsen. För att göra det senare må man blanda in de långa tallisterna och sedan finna den relevanta lösningen (och hålla reda på när den skall vara negativ eller positiv). Produkten av de givna hjälpprimtalen bör vara längre än de förväntade talen, och när den positiva lösningen är stor är den i själva verket negativ. Dock man undkommer inte att implementera euklides algoritm på dessa listor vilket involverar ett divisionsförfarande. (Gör man detta idiotsäkert tar det för lång tid, vill man gå genvägar är det lätt att det blir buggar). Efter många om och men kan jag dock presentera följande tabell. (Vilken kan checkas med de enkelt programmerade flyttals approximationerna.)

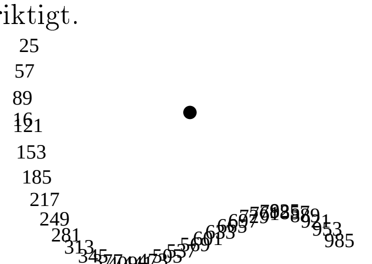
multipel	punkt
P	$(1, 1)$
2P	$(-1, 1)$
3P	$(0, -1)$
4P	$(3, -5)$
5P	$(5, 11)$
6P	$(\frac{1}{4}, \frac{7}{8})$
7P	$(-\frac{11}{9}, -\frac{17}{27})$
8P	$(\frac{19}{25}, -\frac{103}{125})$
9P	$(56, -419)$
10P	$(\frac{159}{121}, \frac{1861}{1331})$
11P	$(-\frac{255}{361}, \frac{7981}{6859})$
12P	$(-\frac{223}{784}, -\frac{24655}{21952})$
13P	$(\frac{5665}{2809}, -\frac{399083}{148877})$
14P	$(\frac{26239}{2601}, \frac{4231459}{132651})$
15P	$(\frac{23464}{49729}, \frac{8824453}{11089567})$
16P	$(-\frac{350701}{265225}, -\frac{13919407}{136590875})$
17P	$(\frac{1044021}{1907161}, -\frac{2068194649}{2633789341})$
18P	$(\frac{9840321}{702244}, -\frac{30795303833}{588480472})$
19P	$(\frac{78094085}{43784689}, \frac{640700244397}{289723287113})$
20P	$(-\frac{164914877}{419061841}, \frac{9902960463475}{8578614947111})$

Teoretiskt kan pärlbandet sluta sig till en loop (ett halsband). Man talar då om torsion. Att torsion skall uppkomma är i princip ganska ovanligt, ty de aktuella lösningarna tenderar att få större och större höjder. Och i själva verket, som Kurlberg påpekar, Mazur har visat att torsionen för en rationell punkt på en kurva kan högst vara tolv. Ur detta ser vi speciellt att vårt pärlband kommer att fortsätta (i bägge riktningarna) i det oändliga.

Som vi ser hade vi tur som valde någon av punkterna $(1, \pm 1)$ som bas, någon annan av de kända punkterna skulle inte ha genererat hela bandet. Man kan då fråga sig huruvida $(1, \pm 1)$ är primitiva punkter, eller om vi kan finna andra punkter som genererar dem? D.v.s. att de är dividerbara. Detta är inte en helt enkel fråga att besvara. En annan naturlig fråga är om det finns andra pärlband, d.v.s. om rangen av Mordell-Weil gruppen är strikt större än ett.

Konkreta studier av sådana frågor för specifika kubiker har faktiskt en tradition i Sverige, i Uppsala närmare bestämt där den norskättade matematikern Trygve Nagell var professor. Hans verksamhet i Sverige rönte en viss notoritet bland hans analys-kolleger och sarkastiska kommentarer fälldes om att han hade en oändlig räcka med avhandlingsproblem nämligen en för varje elliptisk kurva. Under en lång tid representerade Nagell algebran i Sverige och hans elementära lärobok i Algebra var länge använd som standard i den elementära universitetsutbildningen.

Hur är punkterna fördelade? Det är intressant att se olika mönster i dess distribution. Speciellt ser vi hur multiplar $aP, (a+9)P, (a+18)P \dots$ uppkommer som näraliggande konsekutiva punkter på kurvan Genom att plotta mer punkter kan vi se om mönstret upprepar sig. Förklaringen är enkel. $9P$ är helt enkelt en punkt som är nära noll. Eftersom noll på kurvan ligger i oändligheten (punkten som motsvaras av vertikala linjer) kommer en sådan punkt ha stora ko-ordinater. Nästa stora punkt, d.v.s. nära noll kommer att vara $32P = (436.503782, 9119.706883)$, (och $16P$ kommer att vara den förtsa goda approximationen av 2-torsionspunkten, d.v.s. en punkt med $|y|$ nära noll) och om vi plottar fler punkter finner vi också mycket riktigt.



Vidare att $(121-16)P = 105P$ måste vara en punkt ännu närmare noll (och $35P$ nära en 3-torsionspunkt, d.v.s. en inflexionspunkt på kurvan). Om vi undersöker finner vi att
$105P = (10088.064112, 1013238.651577)$.
Vi kan undersöka vidare och få punkter närmare och närmare noll. Bilden av alla multiplar kommer helt enkelt att vara tät på kurvan. Att beräkna det exakta värdet på $105P$ är betydligt ty tyngre. Den reella bilden på den elliptiska kurvan är helt enkelt bilden av en cirkel. Om man bara är intresserad av den rent 'kombinatoriska' fördelningen av punkter (d.v.s. ordnings relationer) kan detta lika gärna diskuteras på cirkelnivå. Via någon paramaterisering av elliptiska kurvan (säg med Weierstraßfunktionerna) utgör den reella bilden helt enkelt bilden av R modulo den reella perioden (som kan normeras till ett). Punkten P motsvaras helt enkelt av en reell punkt t och vi är helt enkelt intresserade av distributionen av nt modulo 1.

Foto: Ann-Britt Ohman

Pär Kurlberg - Göran Gustafssonpristagare

Pär Kurlberg föddes den 17 maj 1969 i Västerås, där han också växte upp och tog studenten 1988 vid Wennströmska gymnasiet i staden. Därefter studerade han på D-linjen (datalogi) vid Linköpings Tekniska Högskola. Fjärde året utnyttjade han universitetets program för utlandsstudier och for till Stanford där han blev fast under en betydligt längre tid än vad han ursprungligen må ha tänkt sig. Han erhöll där en Master of Science 1994 samt en Ph.D. 1997 under Daniel Bumo, med en avhandling med titeln 'A Local Riemann Hypothesis'. Därefter följde Post-Docs i Tel-Aviv och Georgia under sammanlagt fyra års tid. Han återvände till Sverige 2001 och var först forskarassistent vid Chalmers (med docent-status sedan 2002) men flyttade 2004 till KTH där han sedan 2009 är professor.

Han har erhållit ett otal utmärkelser under årens lopp, av vilka jag nöjer mig med att nämna Wallenbergspriset 2002 och Göran Gustavsson priset (ej att förväxla med den aktuella utmärkelsen) 2005.

Kurlbergs matematiska intressen rör främst talteori, men även dess kopplingar till kvantkaos. I motiveringen anföres att han får priset...

> *för sina insatser i gränsområdet mellan dynamiska system och talteori. Speciellt har han framgångsrikt använt sig av talteoretiska metoder för att nå intressanta resultat inom kvantkaos. Dessa tekniker har även lett till nya framsteg inom den klassiska teorin för likformig fördelning i talteorin.*

I och med detta nummer är Kurlberg även en medarbetare i Utskicket.

Foto: Ulf Persson

Robert Berman - Wallenbergspristagare

Robert Berman föddes i Göteborg 14 oktober 1976 och tog studenten vid Göteborgs Högre Samskola 1995. Han studerade vid Göteborgs Universitet fram till 1999, spenderade ett år vid Warwick University där han skrev en kort avhandling under Mario Micalleff, med titeln 'The Seiberg-Witten equations and the proof of the Thom Conjecture'. De nästföljande fem åren var han doktorand vid GU (med en kortare vistelse vid Institut H.Poincaré) och presenterade våren 2006 en avhandling med titeln 'Bergamn kernel asymptotics and Holomorphic Morse Inequalities' under Bo Berndtsson.. Därefter har han spenderat halvannat år vid Institut Fourier vid Grenoble.

Berman erhåller Wallenbergspriset med motiveringen

> *...ett flertal fundamentala och nyskapande arbeten inom komplex differentialgeometri och pluripotentialteori. Han har genom sin forskning bidragit till klargörandet av tidigare olösta frågor om till exempel asymptotik för Bergman-kärnan och konvergens av Feketepunkter mot jämviktsmåttet.*

Berman är gift och har två barn.

Wallenbergpriset till Robert Berman

Bo Berndtsson

Robert Berman, som får matematikersamfundets Wallenbergpris i år, har på kort tid åstadkommit en rad väsentliga och delvis spektakulära resultat inom flera olika områden. Om man skall nämna ett genomgående tema i hans forskning är det förmodligen Bergmankärnan. Robert har dels bidragit med nya resultat om Bergmankärnan och speciellt dess asymptotik, dels använt dessa resultat inom komplex analytisk geometri, potentialteori och sannolikhetsteori.

Vad är då Bergmankärnan? I sin ursprungliga form har den att göra med rummet $A^2(D)$ av kvadratintegrerbara holomorfa funktioner i ett område D i komplexa planet. Detta rum är ett slutet delrum till $L^2(D)$ och det finns alltså en ortogonalprojektion från L^2 till A^2. Kärnan för denna integraloperator, $K(z, w)$, är Bergmankärnan. Detta är den situation som Bergman först arbetade i, men det är klart att idén att titta på en sådan kärna kan generaliseras till en mängd olika situationer: L^2-rum med vikter $e^{-\phi}$, områden i flera variabler, komplexa mångfalder och holomorfa sektioner till linjebuntar i stället för holomorfa funktioner. Ja, i själva verket finns motsvarande objekt även för rum av funktioner eller sektioner som inte är holomorfa, t ex egenfunktioner till en differentialoperator eller harmoniska former.

Det visar sig att funktionen $B(z) = K(z, z)$ är speciellt intressant, och den kan skrivas

$$B(z) = \sum |f_j(z)|^2$$

om f_j är en ortogonalbas för rummet vi tittar på. Om vi är på en kompakt mångfald, eller om rummet av någon annan anledning är av ändlig dimension, får vi direkt att integralen av B är lika med dimensionen av rummet, och redan det är en god anledning att studera B närmare.

Låt oss betrakta situationen där L^2-normen defineras av en följd av vikter $e^{-k\phi}$, där k är en parameter som går mot oändligheten. Här kan ϕ antingen vara en funktion på ett område i $\mathbb{C}^n$ eller en metrik på en linjebunt över en komplex mångfald. Vi får en följd av Bergmanfunktioner

$$B_{k\phi} e^{-k\phi}.$$

Om ϕ är glatt och strikt (pluri)subharmonisk finns då en precis asymptotisk utveckling

$$B_{k\phi} e^{-k\phi}/k^n = b_0 + b_1/k + ...$$

där b_j är explicita uttryck i ϕs derivator. Detta resultat går tillbaka till arbeten av Bouche, Tian, Zelditch och Catlin, som i sin tur bygger på asymptotiska formler av Hörmander, Fefferman och Boutet de Monvel-Sjöstrand. Den första termen här är väsentligen

$$\det \phi_{j\bar{k}},$$

alltså determinanten av den komplexa Hessianen, eller $MA(\phi)$ (där MA står för Monge-Ampere). Detta uttryck kan också uppfattas som volymelementet för den Kählermetrik $\omega_\phi = i\partial\bar{\partial}\phi$ som definieras av ϕ. Den andra termen är också mycket betydelsefull; den är väsentligen den skalära krökningen av metriken ω_ϕ.

Redan den första termen ger intressant information. På en kompakt mångfald, med en linjebunt L som har en metrik med strikt positiv krökning, ger integration av den asymptotiska utvecklingen att dimensionen av rummet av holomorfa sektioner till multiplar kL växer som ck^n, där c är volymen av mångfalden själv

$$\int_X \omega_\phi^n/n!.$$

Denna formel kan uppfattas som en (asymptotisk) generalisering av formeln för dimensionen av rummet av polynom av grad högst k i n variabler, eller som en asymptotisk variant av Hirzebruchs Riemann-Roch formel.

I några av sina första arbeten utvecklade Robert en liknande asymptotik till rum av harmoniska former med värden i en linjebunt (med en metrik som fortfarande är glatt, men inte nödvändigtvis positivt krökt). Man får då i allmänhet bara en olikhet, men en omedelbar konsekvens är uppskattningar av dimensionen av rummet av harmoniska former. Genom Hodges sats är dessa rum isomorfa med kohomologigrupperna med värden i kL, och vi får alltså uppskattningar av kohomologin. Dessa är kända som *Demaillys holomorfa Morse-olikheter*. Andra förenklingar av Demaillys ursprungliga argument hade tidigare getts av Demailly själv och Bismut, men Roberts argument är väsentligt enklare. Dessutom har metoden den fördelen att den generaliserar till mångfalder med rand, där de holomorfa Morse-olikheterna tidigare bara var kända under ganska restriktiva förutsättningar.

I några senare arbeten analyserar Robert därefter asymptotiken för Bergmankärnor (för holomorfa funktioner eller sektioner till en linjebunt), där viktfunktionen inte längre är plurisubharmonisk. Det visar sig då att gränsvärdena beskrivs ungefär som i det plurisubharmoniska fallet, men man måste byta ut den icke-plurisubharmoniska funktion mot sin största plurisubharmoniska minorant. Situationen påminner inte så lite om vad som händer när man tar den dubbla Legendretransformen av en ickekonvex funktion. Även detta resultat har intressanta konsekvenser och visar sig bl a leda till en flerdimensionell generalisering av ett arbete av Hedenmalm och Makarov.

Efter detta tog Robert upp ett samarbete med Sebastien Boucksom som blev mycket fruktbart. Om vi skall fortsätta att beskriva ämnet i termer av Bergmankärnor, så handlar det nu om att undersöka asymptotiken när L^2-normen definieras genom integration över en kompakt delmängd av mångfalden. Ett mycket klassiskt exempel är ortogonalpolynom för en kompakt delmängd av komplexa planet, som ju kan uppfattas som en äkta delmängd av Riemannsfären. Bergmankärnan brukar här gå under namnet Christoffelfunktionen och dess asymptotik är en viktig del av den klassiska teorin om ortogonalpolynom. Just idén att se situationen som inbäddad i en kompakt mångfald, och polynomen (av växande grad) som sektioner till (multiplar av) en linjebunt visade sig redan det förenkla problemen avsevärt. En annan mycket central idé i sammanhanget är att utnyttja en slags primitiv funktion till Bergmankärnan som ibland kallas Donaldsonfunktionalen.

Bergmankärnan definierar ju ett mått på mångfalden och måttet kan vi se som en linjär form på rummet av (kontinuerliga eller glatta) funktioner. Rummet av funktioner kan i sin tur uppfattas som tangentrummet till den oändligadimensionella mångfalden av metriker på linjebunten. Den goda överraskningen är att den differentialform på en oändligdimensionell mångfald vi får på det sättet är exakt, alltså ges som d av en funktion. Denna funktion är Donaldsonfunktionalen, $\mathcal{L}$, och den kan skrivas ned explicit som en Gramdeterminant. Gränsvärdet för $\mathcal{L}$ hade redan beskrivits av Rumely, åtminstone i en speciell situation. Rumely bevisade sin formel med hjälp av metoder från aritmetisk geometri, och det första Robert och Sebastien gjorde var att ge ett nytt bevis och en generalisering med analytiska metoder. Genom att använda sig av vissa konkavitetsegenskaper hos $\mathcal{L}$ kunde de sedan, tillsammans med David Witt-Nyström, visa att det var legitimt att applicera d-operatorn och på så sätt få asymptotiken för Bergmankärnorna själva. I detta ligger också att även gränsfunktionen är differentierbar, vilket är långt ifrån självklart, och att dess derivata (som form på vår oändligdimensionella mångfald) ges av *jämviktsmåttet* för kompakten.

Detta resultat har en spektakulär tillämpning på ett klassiskt problem om fördelningen av *Feketepunkter*. I den klassiska sättningen i en komplex variabel fås Feketepunkterna av ordning k för en kompakt mängd i planet genom att man maximerar *k-diametern*

$$\Delta(\mathbf{x}) := \Pi_{j\neq k}|x_j - x_k|$$

över k-tiplar $\mathbf{x}$ i K^k. Sådana uttryck har inte mycket innebörd på en allmän mångfald, eller ens i högre dimensioner, men det är välkänt att k-diametern kan skrivas som en Van der Monde determinant

$$\det(x_j^l)$$

definierad med hjälp av monombasen för rummet av polynom av grad högst k. En trivial, men viktig, observation är att monombasen här kan bytas mot vilken annan bas som helst. Även om det ändrar värdet av determinanten så maximeras determinanten av samma k-tipler. Feketepunkterna kan på så sätt definieras för polynom av flera variabler, och också för rum av sektioner till en linjebunt. Determinanterna som uppkommer är nära relaterade till Gramdeterminanterna som ger Donaldsonfunktionalen. De tidigare resultaten ger via ett elegant trick en mycket allmän sats om likafördelning av Feketepunkter med avseende på jämviktsmåttet, som tidigare ansågs utom räckhåll ens för polynom i två variabler.

Den här beskrivning täcker kanske in ungefär den första hälften av Roberts arbeten, och utrymmet medger inte att jag beskriver hans resultat om Monge-Ampere-ekvationer, Kähler-Ricci flöden, determinantprocesser, analytisk torsion och ...Sammantaget ger hans arbeten en mycket attraktiv blandning av abstrakt teori och konkreta resultat, och hans Wallenbergpris är mycket välförtjänt.

◇ ◇ ◇ ◇

Announcement of three satellite activities to the spring 2011 program "Algebraic Geometry with a view towards applications" at the Mittag-Leffler Institute.

Jan. 10-14: Workshop at the CMA in Oslo
`<http://www.cma.uio.no/>`
"Algebraic Geometry in the sciences"
organizers: R. Piene, K. Ranestad, S. Sullivant.
`http://www.cma.uio.no/conferences/2011/algebraic_geometry.html`

Feb. 21-25: Workshop at the CIAM KTH
`<http://www.ciam.kth.se/>`
"Solving polynomial equations"
organizers: S. Di Rocco, J. Rosenthal, B. Sturmfels
`http://www.math.kth.se/ dirocco/ML2011/CIAMWORKSHOP/workshopCIAM.html`
`<http://www.math.kth.se/%7Edirocco/ML2011/CIAMWORKSHOP/workshopCIAM.html>`

May 30-June 3, at Stockholm University: MEGA 2011
(Effective Methods in Algeberaic Geometry)
`http://www.math.kth.se/mega2011/`
organizers: A. Dickenstein, S. Di Rocco, M. Passare and sponsored by the ESF.

There will be some funding available for young participants to all three events. Check the respective homepage for deadlines.

For the MEGA conference a call for abstracts for additional invited talks will be announced in late fall 2010. Updated information on deadlines will be posted on the conference webpage.

The spring 2011 program "Algebraic Geometry with a view towards applications" at the Mittag-Leffler Institute

`<http://www.mittag-leffler.se/>`

will gather experts in Enumerative and Computational Algebraic Geometry in Stockholm to discuss and report on recent advances in the area. The emphasis of the program is on the algebraic geometrical techniques that recently have opened new directions in other fields like Physics, Statistics, Biology, Numerical Analysis. More information is available on

`http://www.math.kth.se/ dirocco/ML2011/ML.html`

`<http://www.math.kth.se/%7Edirocco/ML2011/ML.html>`

. Attendance to the program at the institute is by invitation only, due to the limited space at the Mittag-Leffler Institute.

- Kristian Ranestad, Sandra di Rocco

Interview with the President of the Clay Institute - James Carlson

Ulf Persson: *I have been looking at the homepage of the Clay Institute and among other things found out that it has an office on Bow Street in Cambridge, Massachusetts (incidentally a street I recall very well, I bought my first ten-speed there back in 1974, a short bowed street really within the Harvard Square area). Is this a real office with a secretary where you sometimes can be found, or is the Institute more or less virtual, and you run it from your laptop back in Utah?*

James Carlson: The office is a real one. In fact, I have a ten-speed bicycle in a storage room there — never re-assembled after my move from Utah. I am physically there about half the time, but with the Internet and good staff, it is possible to be present in some form one hundred percent of the time staff, and the space is quite full when we conduct workshops there. It is a great place to work, being so near Harvard and MIT. I enjoy the periods when we hold the workshops most of all, since then there are plenty of mathematicians around. At the worksops we sometimes have wine and cheese late in they day, and that the best moment to find out what is going on. I always learn something interesting, even if it is not in my field.

UP: *Everyone knows of the Millennium Prizes, to which I will shortly return, but the initial ambition of the founders was to promote mathematics. What other activities does the Institute run?*

The Clay Research Fellowship program, a postdoctoral program, is our largest activity in terms of budget. Fellows are selected each year by our Scientific Advisory Board. They hold their fellowship for a period of up to five years at whatever institution or combination of institutions best supports their research work. CMI holds is a regular summer school, each time in a different location on a different topic. This year it is in Brazil, and the topic is probability and statistical physics in two and more Dimensions. Out of each school comes a book, which is a kind of very advanced graduate text.

CMI also publishes a series of monographs. The last one was the book by Morgan and Tian on Ricci Flow and the Poincaré conjecture. As I mentioned above, the Institute conducts workshops in Cambridge; these are quite free in their format, which varies according to the philosophy of the organizers. The Institute supports many external conferences in collaboration with others. Its senior scholar program enables research institutes to get an early commitment from distinguished mathematicians around which a program is built. For example, last year John Tate and Dick Gross were Clay Senior Scholars at the 2009 PCMI/IAS program on Arithmetic and L-functions. CMI supports parts of the Ross and PROMYS programs, which do an outstanding job of introducing talented high school students to what research mathematics is really like. I wish that there were more, and more consistent support for such programs. From time to time, CMI has appointed mathematicians as research scholars to free their energies for projects of special importance. A good example its appointment of Bruce Kleiner and John Lott as research scholars when they were wring their modestly titled "Notes on Perelman's Papers," which they posted to the Internet on a regular basis. The Institute also engages in occasional special projects, e.g., the film by George Cscicsery on the life and work of Julia Robinson (which also had major support from Will Hearst III), and the digitization of the oldest extant copy of Euclid's elements, one dating from the year 888, when it was copied from a predecessor in Constantiople. Along the same lines, CMI digitized the Klein Protokolle, a record of Felix Klein's seminar in Göttingen, 1872-1912. There is much more to do there: there exist only a single copy of a set of the manuscripts that fil two bookshelves in the librarian's office in the mathematics office. Finally, CMI recognizes exceptional achievement each year with the Clay Research Awards, presented at an annual research conference, generally held in Cambridge, Massachusetts. The last few winners were Jean-Loup Waldspuger and (jointly) Ian Agol, Danny Clegary, and David Gabai. This year the conference will be held in Paris, June 8 and 9.

UP: *Now there are certain strictures to be met before the coveted one million can be awarded. For one thing, the solution must have appeared in a referred journal for at least two years, and thus become accepted by the mathematical community. But are there other checks on the veracity of a proposed solution? Does the Institute set up its own committee?*

JC: The Scientific Advisory Board appointed a Special Advisory Commitee charged with rending a recommendation on the correctness and attribution of the proof. Its members were Simon Donaldson, David Gabai, Misha Gromov, Terry Tao and Andrew Wiles. Donaldson and Wiles are members of CMI's Scientific Advisory Board.

UP: *Now Perelman never published his solution in a standard journal but was content with an Internet posting. Has that really been a problem? I mean a formal problem?*

JC: It has not been a problem. There were a number of refereed publications, e.g., the book by Morgan and Tian and the article in Geometry and Topology by Kleiner and Lott. There was also the article by Cao and Zhu in Asian Journal of Mathematics.

UP: *In particular Perelman never bothered to publish a detailed proof, on the other hand, as you have noted, three different sets of mathematicians went through Perelman sketches and reconstructed the arguments for the benefit of a wider mathematical community. Do you see this as actually a far more solid verification than a regular referee report would have been? (In particular, to connect to a previous question would this have made any independent investigation on your part superfluous).*

JC: I do hisview the process of verification of Perelman's breakthrough far more solid than what is usual, even for major results. The fact that three groups working largely independently reached the same conclusion gives an uncommonly high degree, perhaps unprecedent degree of confidence. As for the superfluity question, I don't view it that way. Perelman's result was exceptional, both in what accomplished, and in the elegant brevity of its exposition. Kleiner and Lot , say the following in the introduction to their paper: "*Regarding the proofs, the papers [47, 48] contain some incorrect statements and incomplete arguments, which we have attempted to point out to the reader. (Some of the mistakes in [47] were corrected in [48].) We did not find any serious problems, meaning problems that cannot be corrected using the methods introduced by Perelman.*" The last statement is the most important one.

UP: *At the ICM in Madrid I discussed the future award of the Clay prize with John Morgan. He did not think (at least at the time) that it would be unreasonable to split the cash prize between many people, in particular that Hamilton was entitled to a sizable cut. I guess splitting a Clay award between many people are not ruled out by the stature. Did you ever consider seriously splitting the prize on Poincaré, or would this be too sensitive a matter to discuss in an interview?*

JC: I would like only to make a general comment. All mathematical work depends on the work of other mathematicians. Consider, for instance, Deligne's proof of the Weil conjectures. It was his work, but it depends crucially on the work of Grothendieck. Without Grothendieck, there would have been no tools to do the job. But it was Deligne who proved the result; for his proof, he receive the Field's Medal. Both Deligne and Grothendieck were recognized by the Fields Medal. It is so, and will be so with Perelman's breakthrough. Hamilton is recognized for his pioneering work in Ricci flow, and for its flourishing development over a period of decades. He was been widely recognized by his peers, by significant prizes — the Oswald Veblen Prize in Geometry in 1996, the Clay Research Award in 2003, and the Leroy P. Steele Prize for a Seminal Contribution to Research in 2009. I would be unsurprized if he were awarded another very significant award in the near future. Hamilton deserves enormous credit. But the Millennium Prizes are for the solution of specific problems and so have a narrow (but intense) focus.

UP: *Do you have any personal opinion on the problems of giving dues when a major mathematical conjecture is broken. After all there is the case of standing on giants, and the cracking of a problem is never done in complete isolation, many people before have suggested important strategies and often rephrased it in some other form, and it is often in an alternate form that the problem is finally solved. Many people may get the idea that the basic strategy was laid down by Hamilton and that he run into technical snags, which Perelman managed to solve. (I know of course from talking to people that this is a very reductionist view of Perelmans accomplishment, yet the issue is of some principal interest.)*

JC: Perelman did much more than resolve technical snags. There were huge obstacles to carrying out Hamilton's program, and it was not clear, say at the the time that Milnor wrote his article in 2000, that analysis was the way to go, or even that the answer the to conjecture was positive See his original 2000 article (www.claymath.org/poincare/milnor_2000.pdf). Analytic methods were not even mentioned. Among the obstacles was lack of an adequate understanding of formation of singularities under Ricci flow. To surmount these obstacles, more than technical brilliance was required, though of course it required that too. New ideas were needed, e.g., Perleman's entropy functional, and his local L-functional. One could say that the Navier-Stokes problem is unsolved because of some technical difficulty about formation of singularities. But that is the essence of that problem.

UP: *Perelman is somewhat difficult as we all learned when he declined the Fields medal. (At the time there were rumours that he might feel different about the cash prize). The then President of the IMU - John Ball, made a special trip to St-Petersburg appealing to him to accept the honor. He reported that Perelman had been very polite but firm in his decision. Have you ever met Perelman before? And if so did you make any independent assessment of him?*

JC: I have not met him, but I have spoken with him. He is very polite and has a sense of humor. He is very principled. I admire that.

UP: *How did you make it known to Perelman that he had been awarded* *the prize? By phone? (As being the standard procedure with the Nobel Prize) By e-mail? By an intermediate proxy? Did you speak to him? Did you even travel to St-Petersburg to deliver the news in person and make a similar appeal as had Ball to entreat him to accept the prize?*

JC: I contacted him first by FedEx and have spoken with him a number of times.

UP: *There are rampant rumours as how Perelman reacted to the award. It is being reported that his refusal was even more adamant than four years ago, some ugly ones posted on the Internet purport even that he acted with violence. As I understand it, the award was made formal on March 18, and Perelmans official refusal followed one week later on March 23. Had he been deliberating in the meantime? Or has his stand been principled and firm all throughout, and if so had you been given intimations that he was sure to decline the prize?*

JC: I have no comment on rumors. My few dealings with Dr. Perelman have been polite, unemotional, and pleasant. He is a very well-informed and cultivated person of wide interests, though admittedly I know some of this only second-hand. Of course I think he should accept the financial award: he deserves it for the enormous contributions he has made. There is great flexibility in how it can be accepted. But in the end, it is his decision, and we should all respect it. I have no intimations about his declining the cash part of the prize. As I cannot emphasize enough, he has already won the prize by unanimous recommendation of a group of distinguished mathematicians (who consulted other distinguished mathematicians in writing). What remains is his decision on whether to accept the funds offered. He has not made that decision and has said that he will inform me when he does. He is a man of his word.

UP: *Now most likely Perelman is not going to budge. What would be the best strategy for the Clay Institute: Not to give out the money? Give it to some other worthy need? Or keep it in cold storage until Perelman changes his mind and then let him have it? (There is a story of Sartre, who having in the grand style refused the Nobel Prize, many years later asked for the money. A request, much to the credit of the Nobel Foundation, that was refused. Not that Perelman should be compared to Sartre, on the contrary, I think that the overwhelming majority of mathematicians would not begrudge him the money, would he accept it in secret).*

JC: I do not want to speculate, especially about the future, to paraphrase that great philosopher, Mark Twain. The cash part of the Millennium Prize will be dealt with sensibly and sensitively; am sure that whatever is done will be accepted by most mathematicians as a just and appropriate outcome. But it would be unseemly to publicly speculate while Perelman is coming to his decision.

UP: *In other words you do not rule out the possibility that Perelman will, as some people would say 'come to his senses', or as I would prefer to put it, make peace with the mathematical community, provided we just leave him alone and not put him on the public stage. (As incidentally this interview is trying to do!)*

JC: I would not say that. Perelman navigates his life by his own star. What we or some other group do will have little effect. Going back to another point, his avoidance the paparazzi or other journalists would be viewed as entirely normal, as would being upset at disruption of privacy.

UP: *The question may be moot, but nevertheless, this being the very first time a Clay prize is to be made. Have you given the process any thought? Should there be a ceremony, or just a short announcement? The Millennium Prizes are of the sort that it is far from clear that there will be occasion to give any more for a thousand years? (Or do you have any private opinions on the matter?)*

JC: I have certainly thought about the ceremony, and in addition to a plan A, I have thought about plans B and C. It is an unusual situation, that is for sure. But that makes it more interesting. About the next prize — who knows when it will come. I don't think it will be a thousand years, but I doubt that it will be in three years time. I have no secret knowledge of a breakthrough brewing somewhere; nobody knows. But what is remarkable is the tremendous progress that mathematics has made of late — the Weil conjectures, Fermat's last theorem, the Poincaré conjecture, to name three. Other such breakthroughs will come. We live in a golden age of mathematics.

UP: *Perelman has certainly entered the awareness of the general public. (Only today I read a review of a biograhy of him in the NYR, one of the very few times a mathematician has been considered by that that journal). The question is whether he is good or bad publicity for mathematics? Does he merely confirm standard prejudices about the strangeness of mathematicians, or (what I suspect) intrigue people about mathematics and mathematicians and add to the fascination of the subject?*

JC: There is a point of view that all publicity is good publicity. For the most part, I subscribe to that view. I believe that the Millennium Prizes and Perelman's solution of the Poincaré conjecture have added something to public understanding of mathematics. Many more people know now that mathematics is a living subject, with fascinating and important unsolved problems. They have a better appreciation that mathematics is not a field that was came to a standstill several centuries or millennia before the final exam in their high school algebra class. Many more people talk about mathematics, and ask questions about it than before. As a faculty member at the

University of Utah, before I had any involvement of CMI, I had many, many more questions about mathematics and discussion of it after the Millennium Prizes were announced Students were curious. The airplane index of mathematics is way up: I have more spontaneous questions form my seatmate on a long flight once they learn that I am a mathematician. The number one million with that dollar sign in front does get one's attention. Regarding the image of mathematicians, it is hard to change. Though I understand the predicament of journalists, I ardently wish that giving a complete, human portrayal, that getting out the truth, as opposed to a story focused on a small, unrepresentative part of the truth, had as much weight in the public makret of ideas as a hyperbolic tale does.

◇ ◇ ◇ ◇

Utskicket

Ulf Persson

Som redan tidigare berörts i förra höstnummer har styrelsen beslutat att Utskicket skall numera endast tillhandahållas elektroniskt och pappersformen skall fasas ut. Detta har vittgående konsekvenser för Utskickets form och ambitionsnivå. Finanseringen av Utskicket har hittills skett med institutionernas tysta medgivande genom att tillåta vaktmästarna att skriva ut den, och genom att ordförandens institution betalar porto för de enskilda medlemmarnas. Detta provisorium har till största delen av vad jag förstår fortsatt under året, men styrelsen anser att detta är ohållbart i längden.

Skall SMS ha ett pappersutskick i framtiden, eller ens ett Utskick? Kanske informationen på hemsidan är fullt tillräcklig? Denna fråga bör diskuteras utförligt under årsmötet, och är uppfört såsom en punkt på dagordningen (se sid 95). Om du har synpunkter på detta, kontakta oss (riklig kontakinformation är tillgänglig på omslagets vänstersida). Om du ej har lust och möjlighet att närvara vid årsmötet försök ändå att få dina synpunkter förmedlade till detta.

Matematiker jag mött II

Gert Almkvist

Gert Almkvist: **Berkeley, 1970** © *George M. Bergman*

Resor.

Vid ett besök i Moskva träffade jag Verma från Tata Institute i Bombay. Han är berömd för Vermamodulen som kreerades i hans doktorsavhandling från 1966, skriven under ledning av Jacobson på Yale. Sedan dess har han mest blivit känd för att ha skrivit en rescension i Math. Review som var dubbelt så lång som artikeln. Verma är vegeterian och hade stora svårigheter att få något att äta i Moskva. Han skulle deltaga i Björners kombinatorikkonferens på KTH ett par månader senare. Så jag bjöd in honom på en månad i Lund. Han var en utmärkt kock men i övrigt en ganska besvärlig gäst. Det slutade med att han via Stockholm försvann till Novosibirsk med institutionens nyckel och mina kryddor.

Konferensen på KTH hade prominenta deltagare. I.M.Gelfand med dotter och Vershik kom från Ryssland och Stanley från USA. Zelevinsky ville köpa en Geigermätare (han ville mäta strålningen i Moskva). Jag hjälpte honom men priset var för högt. Jag lagade pannkakor till ett helt gäng rumäner i Gudrun Brattströms lägenhet. Verma höll ett bedrövligt föredrag.

Jag blev ordförande i Matematiska Samfundet och Torbjörn Tambour blev sekreterare. Det värsta med detta uppdrag är att hitta arrangörer för för de årliga möten för gymnasielärare. Ett var i aulan i en skola i Jönköping. Gårding skulle hålla föredrag om Abel och 5:egradsekvationen. Först kom han en månad för tidigt. Sedan fanns det ingen tavla att skriva på. Det är inte lätt att skriva direkt på en overheadapparat. Jag minns ett annat möte i Luleå. Gunnar Aronsson skulle för första gången hålla föredrag med slides. Han hade tre blad och föredraget var över på fem minuter.

Tambour och jag reste runt i DDR. I Halle blev vi hembjudna till Wolfgang Vogel. I Karl Marxuniversitetet i Leipzig har man fortfarande en paternosterhiss. Vi satt i kafeterian ungefär 20 minuter före mitt föredrag. Då fick jag se en skylt med mitt namn och titeln på föredraget ”Einige Aspekte der Invariantentheorie”. Jag hade inte hållit på med invariantteori på fem år och hade ingenting med mig om detta ämne. Den skyldige måste ha varit Bernd Herzog i Jena, som var känd för att krångla till det mesta. Jag blev räddad av Torbjörn som hade med ett gammalt föredrag jag hållit i Warszawa (på engelska). Det var dessutom kollokvium med ett 50-tal åhörare.

Ett problem i DDR var att ingen hade telefon (i Moskva hade alla telefon). Möten måste avtalas långt i förväg med vanlig post. En gång skulle jag övernatta i Berlin hos Bernd Herzogs vän Klaus Altmann. Bernd skulle ringa från institutionen i Jena. Efter något letande ringer jag på hos Altmanns vid elvatiden på kvällen. Klaus öppnar och ser förvånat på mig. Vi har aldrig träffats och han visste inte om att jag skulle komma. Han väcker sin fru som får sova hos barnen. Sedan delar jag dubbelsängen med Klaus. Många år senare träffar jag Klaus på MIT. Ytterligare tio år senare upptäcker jag att Klaus och jag båda har van Stratentalet ett.

Kommunismen i östblocket bröt samman. Detta orsakade problem för många matematiker. Increst i Bukarest råkade illa ut eftersom Soya Ceauşescu var chef. Samfundet (och Fossum i AMS) skickade ett telegram som stödde Increst. I forna DDR blev många sparkade. Vogel flyttade till Nya Zealand och dog efter ett par år. Peter Schenzel sökte tjänster i Sverige och blev illa behandlad av sakkunniga. Han samarbetade med min elev Leif Melkersson och detta ledde till att någon försökte stoppa Leifs ansökan om resebidrag. Schenzel stämde delstaten Sachsen-Anhalt och fick tillbaka sitt arbete i Halle.

På Atiyahs initiativ samlades vi 1991 i en skog utanför Warszawa för att bilda Europeiska Matematikerunionen (EMU). Fransmännen krånglade. De ville att bara länder i EU skulle få vara med. Jag satt bredvid den tyske talteoretikern Wolfgang Schwarz och sade: ”Nieder mit den Franzosen”. Det visade sig att han ägde Weizenböcks bok utan att veta om det famösa förordet. Jag påpekade att det inte fanns en enda kvinna närvarande. Detta ledde till en lång debatt och att vid EMU:s första kongress 1992 i Paris föreläste flera kvinnor och det fanns också ett Runt Bord om kvinnor i matematiken. Friedrich Hirzebruch blev vald till EMU:s förste ordförande.

På åttiotalet hade Shafarevich skrivit en ny bok, ”Russofobia”. Han hade blivit religiös (ortodox katolik) och ansåg att judarna var skuld till allt ont i Sovjetunionen. Larry Schepp på Bell Labs hade översatt Russofobia till engelska och han gav mig ett ex. Vid den uppsluppna avslutningsfesten i Polen lanserade den ryske Fieldsmedaljören Novikov följande teori för mig: Shafarevich hade bevisat att varje enkel grupp var en Galoisgrupp, för vilket han fick Leninpriset. Senare upptäcktes att det fanns en lucka i beviset för

2-grupper. KGB fick nys om detta och använde det för att få Shafarevich att skriva Russofobia. Detta avvisas av Schepp som varande rent nonsens.

1992 var den första EMU-kongressen i Paris. Före den hade vi ett möte, där vi röstade om Israel skulle få vara med. De israelska delegaterna satt redan där så omröstningen var bara formell. Under själva röstningen började tysken Rentschler (som inte alls skulle vara närvarande) att fotografera. Detta förorsakade upprördhet i församlingen och norrmannen Baas kastade bokstavligen ut Rentschler. Det fanns många satellitkonferenser, bl.a. i talteori. Där frågades (på franska) före föredragen om församlingen ville höra franska eller engelska. Det blev alltid franska (de som ville ha engelska förstod inte frågan). Så även då Don Zagier skulle tala. Han valde trots detta engelska ty han kunde tala fortare då och det gjorde han verkligen. Där ligger t.om. Hörmander i lä. Han är otroligt nog amerikan, men talar sex språk flytande, däribland holländska. Han bad mig en gång att skicka även mina svenska artiklar för han kunde något norska (som han lärt sig på tåget från Köpenhamn till Oslo? Nej, det var kanske Wiener).

Sista föredraget på kongressen hölls av Arnold. Gelfand var ordförande. Arnold hade en enorm hög av slides. Varje gång han frågade hur mycket tid han hade kvar, så höll Gelfand upp fem fingrar. Arnold talade om Vasiljevs arbeten och började med att skälla ut organisatörerna för att inte bjuda in Vasiljev. En halv timme efter tiden lyckades man få stopp på Arnold. Gelfand sade: "Any questions?" . Varpå Douady frågade "What did you intend to continue with?". Så Arnold satte igång igen... Champagnen vi fick efter avslutningen hann bli varm.

I augusti 1991 reste Tambour och jag till Ryssland för att vara med på en stor algebrakonferens i Barnaul i Altaibergen. Efteråt skulle vi åka tåg till Bajkalsjön för en annan konferens. Vi var först ett par dagar i Moskva. Vi blev inbjudna till Vinberg vars fru var bortrest. Torbjörn övertog snart matlagningen. Vinberg gav mig en märklig bok av Fomin (känd för sina futuristiska teckningar men även akademiledamot). Där hävdar Fomin att medeltiden aldrig existerat och identifierar Ptolemaios och Kopernikus. Han hänvisar till Postnikov,som också lär ha samma tro. Nästa morgon (den 19 augusti) flyger Vinberg till Barnaul. Vi skall flyga kl 23. Då vi vaknar ser vi en aldrig sinande ström av tanks på Leninski Prospekt. Kuppen gör att vi blir hemskickade av svenska ambassaden. Dessförinnan blir Torbjörn rånad på gågatan Arbat. Jevgenij Jevtusjenko,som stod på balkongen på Vita Huset bredvid Jeltsin, har ingående skildrat händelserna i boken "Dö inte före din död".

1992 var det en stor konferens på Penn State till minne av Rademachers 100-årsdag. Rademacher var professor i Breslau (numera Wroclaw) men blev 1934 avskedad eftersom han var ordförande i en fredsorganisation. Han skrev till Harald Bohr i Köpenhamn, som vidarebefodrade brevet till Carleman, och sökte nytt jobb. Vi vet inte vad Carleman svarade, men Rademacher kom till University of Pennsylvania i Philadelphia. Där hade han bl.a. eleverna

Andrews och Wilf.

Wilf höll ett kort föredrag där han presenterade en förmodan om att ett visst polynom av grad k hade heltalskoefficienter om och endast om k är jämnt eller ett primtal. Polynomets nollställen förekom i Hardy-Ramanujans formel för antalet partitioner. Jag bevisade Wilfs förmodan då jag kom hem. Senare fann min elev Tim Dokshitzer ett mycket elegant elementärt bevis (även för en generalisering), som blev hans licavhandling. På de flesta andra ställen hade det räckt till en doktorsavhandling. Tim blev doktor för Oort i Utrecht. Han har samarbetat med Zagier och är nu i Cambridge. Nyligen har Arne Meurman och jag visat att vissa generaliserade Wilfpolynom är identiska med Lehmers periodpolynom.

Med Zeilberger skrev jag en artikel om hur man kan beräkna integraler genom att derivera under integraltecknet. Datorn hittar en differentialekvation. Detta ledde till att jag blev inbjuden till en konferens på Cornell om differentialekvationer och datorer. Jag skrev ett brev till Borg att jag nu återvänt till fadershuset. Han svarade med ett långt brev. Samma år skulle vi anordna Matematikolympiaden i Sigtuna. Borg satt i styrelsen för Tryggerfonden. Vi sökte 200000:- och fick 100000:-.

På Cornell träffade jag österrikaren Peter Paule, som numera leder RISC i slottet Hagenberg norr om Linz. Han berättade om hur Buchberger på ett och ett halvt år hade förvandlat en ruin till ett modernt forskningscentrum. Nu försökte Buchberger omvandla Schlossort i Gmunden till ett centrum för logik. Han hade gjort en överenskommelse med utbildningsministern, att staten skulle matcha alla pengar som Buchberger kunde få från näringslivet. Han fixade 100 miljoner. Men det var under den så kallade ”Grosse Koalition”, så finansministern var av en annan partifärg och stoppade projektet. Man hade redan engagerat en chef för institutet, Dana Scott. Han hade anlänt till Österrike med sitt bibliotek (inklusive bibliotekarie).

Även Herb Wilf var på konferensen. Han kom flygande i sitt privatplan från Philadelphia. Han är kanske mest känd för WZ-algoritmen tillsammans med Zeilberger (”named after two complex variables”. Minns ni Banachs B-rum?). Han har också skrivit en utmärkt bok ”Generatingfunctionology”. Wilfs far var förmögen. Under kriget mot England i slutet av 40-talet skänkte han ett krigsskepp till israelerna.

Jag fick ett brev från fysikern Barry McCoy om några trigonometriska summor som påminde om några jag hade haft i mina asymptotiska formler. En gång då jag var i New York tog jag tåget till Stony Brook på Long Island och besökte McCoy. Jag hade turen att höra Yang hålla föredrag. Det hade just varit val och McCoys fru hade arbetat för demokraterna,som hade förlorat flera platser i New York. Då de fick höra att jag bodde hos Bill Kuenstlers dotter blev de mycket intresserade och vi talade politik halva natten (Kuenstler var försvarsadvokaten i Chicagorättegången 1968, som blev dömd till 44 månader för ”contempt of court”).

Efter sammanbrottet (”die Wende”) har institutionen i Halle flyttat till

Stasis kvarter. Varje rum har vapenskåp. Achilles är fortfarande kvar men blir trakasserad för att han var med i Honeckerbataljonen. Alternativet var att göra två och ett halvt års militärtjänst. Snart flyttar han till Bologna. Jag åker vidare till Clausthal i Harz. Där träffar jag Karl Dilcher, som normalt är i Halifax. Han är världens ledande expert på Bernoullital. Jag får se en doktorsavhandling och inser att också i Tyskland finns det enorma skillnader på kvaliteten mellan olika universitet. En doktorsavhandling i Clausthal skulle knappast bli godkänd som Diplomarbeit i Mainz.

Jag utvecklade en suspekt metod att finna asymptotiska formler för talteoretiska funktioner. Därvid använde jag en formel för Fouriertransformationen av funktionen $x^{-\alpha}$ betraktad som distribution. Hörmander sade: "Detta är inte matematik utan metafysik". Men metoden ger ofta mycket goda asymptotiska formler. Meurman och jag studerade det asymptotiska uppförande för a_n där

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-x^n)^{\mu(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

och μ är Möbiusfunktionen. Vi fann mycket goda formler när $n = 10^4$ men det verkliga asymptotiska uppförandet av a_n kommer inte förrän $n = 10^{35}$ och så långt kan man inte beräkna a_n. Andrew Odlyzko på Bell Labs och Klaus Haberland i Jena arbetade också på problemet men hittills har vi inte lyckats knäcka det (Andrews varnade oss).

1978 visade Apéry att $\zeta(3)$ är irrationellt. Därvid använd han följande formel

$$\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^3\binom{2n}{n}}$$

Frågan var: Finns det liknande formler för $\zeta(n)$ för $n = 5, 7, 9, ...$? Jon Borwein och David Bradley hade reducerat problemet till att visa följande identitet

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2n^2}{k^2}\prod_{j=1}^{n-1}(4k^4+j^4)\prod_{j=1, j\neq k}^{n}(k^4-j^4)^{-1} = \binom{2n}{n}$$

som också var känd (men ej bevisad) av Wenchang Chu. Jag formulerad om problemet till att beräkna en viss bestämd integral för alla n. Maple gjorde det lätt upp till $n = 50$. Samtidigt var jag inbjuden till ett möte mellan naturvetare och journalister på Krapperups slott. Jag skulle hålla ett inledningsanförande om matematik och konst. Jag läste Hardys "A mathematician's apology". I förordet av C.P.Snow står det att Hardy på eftermiddagarna spelade cricket och "real tennis". Vad var "real tennis"? Ingen visste. Då kom jag att tänka på engelsmannen Andrew Granville som en gång talade i timmar om cricket. Jag skickade ett fax till honom i Georgia. Samtidigt skickade jag med min integral. Som svar fick jag följande ekvivalenta identitet

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n}{n-k}\prod_{0\le j<n-k,n<j<n+k}(k^2t+j^2)=\left(\frac{(2n-1)!}{n!}\right)^2$$

där parametern t märkligt nog har försvunnit i högerledet. På mindre än en sida lyckades jag bevisa detta och faxade det till Andrew vid 20-tiden. Han svarade att han hade ”office hours” hela eftermiddagen och inte hade tid. Nästa morgon var det inget e-mail kl 8 och jag var rätt sur på Andrew. Men efter min undervisning kl 10 kom en färdig artikel på 7 sidor. För övrigt är real tennis egentligen royal tennis och spelades av munkar från 1100-talet tills det förbjöds. Man får slå bollen i sidoväggarna också.

Beviset ovan ledde till att jag blev inbjuden till Simon Frazer University nära Vancouver våren 1998. Tyvärr var Jon Borwein upptagen med försäkringsärenden (hans hus hade brunnit) men jag talade mycket med hans bror Peter. Vidare kom David Bailey från Lawrence Rad Lab i Berkeley och fysikern David Broadhurst, Milton Keynes på besök. Båda är experter på att räkna numeriskt med tusentals decimaler. Broadhurst hade exakt beräknat en viss Feynmanintegral innehållande två parametrar a och b . Detta gjorde jag också med helt elementära metoder. Men mitt svar såg inte alls ut som Broadhursts (det innehöll 32 olika Clausenvärden). För att visa likheten var jag tvungen att visa ett otal identiteter för Clausenfunktionen

$$Cl_2(x)=-\int_0^x\log(2\left|\sin(\frac{\theta}{2})\right|)d\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$$

För att visa en identitet satte jag in de numeriska värdena $a=1/\pi$ och $b=1/e$ (förhoppningsvis algebraiskt oberoende) och använde sedan LLL-algoritmen (som jag fick av Peter Borwein) för att hitta en linjärkombination av termerna som var noll med små heltalskoefficienter. Sedan differentierade jag linjärkombinationen med allmänna a och b. Därefter var det ”bara” att visa vissa trigonometriska identiteter som gav att koefficienterna för da och db var identiskt noll.

Karl-Egil Aubert dog och jag höll föredrag vid en minnesstund i Oslo. Atle Selberg var där. Jag skrev upp en formel som Selberg-Rademachers (Selberg hade själv hänvisat till Rademacher). Det skulle jag inte gjort. Selberg flög upp: ”Rademacher visade aldrig den formeln”. Sedan höll han en längre utläggning om hur det gått till. Senare vid en talteorikonferens i Wien träffade jag Juttila. Vid ett glatt nachspiel i Grinzing berättade han om en yngre matematiker som visade Selberg ett resultat. Selberg: ”Detta visade jag visserligen på 50-talet, men om du sänder det till en tillräckligt dålig tidskrift, kan du få publicera det”. I Wien träffade jag även Tom Meurman, Åbo, kusin till Arne Meurman.

Jag åkte till Nankaiuniversitetet i Tianjin både 1999 och 2001. Det var konferenser om Kombinatorikens Renässans i Kina, organiserade av den mycket driftige Bill Chen. Första gången bodde vi på samma hotell, som den siste kejsaren bodde på både i verkligheten och i filmen. Det var meningen att Gian-Carlo Rota skulle bli hedersdoktor vid Nankaiuniversitetet men han dog strax före konferensen. Vi hade en sorts minnesstund där flera av hans elever talade. Även andra, t.ex.Lascoux talade om Rotas betydelse för kombinatoriken. Jag hade enbart haft dåliga erfarenheter av Rota så jag höll tyst. Rota var länge redaktör för Advances in Mathematics. I slutet av varje nummer skrev han tvåradersrecensioner, där han antingen höjde en bok till skyarna eller sågade den helt. Följande historia beskriver hans publiceringspolicy: Dan Laksov hade skrivit en doktorsavhandling vid MIT. Han gick in till Rota för att få den publicerad i Advances. Rota lade den överst i en väldig hög med manuskript. Laksov sade att det kunde ta lång tid när högen var så stor. ”Oh,no”, sade Rota, ”I publish from the top”.

Konferensens mest ärade deltagare var Zhexian-Wan, vår kines i Lund. Han var en flitig åhörare på min sista kurs i Lund, ”Modern Graph Theory”. Han tillhörde Rolf Johannessons institution (digitalteknik) och hade inte ens nyckel till vårt bibliotek. Men i Kina var han stor, medlem av vetenskapsakademin. Han hade skrivit artiklar med Hua-Loo-Keng på 50-talet. Tony Guttmann från Melbourne, en av Zeilbergers fiender, var där. Han är känd för att ha fullföljt ett ”vinmaraton” i Frankrike, där vätskestationerna utgörs av vinslott.

2001 var Stanley huvudtalare. Denna gång bodde vi på campus bredvid Cherns hus, Han satt i rullstol och var nästan 90 år gammal. Jag hälsade till honom från Gårding.

I januari 2000 var jag på konferenser i Johannesburg och Kapstaden. Den senare var Panafrikansk med massor av deltagare. Jag återsåg min nigerianske vän, Kuku. Han höll ett bedrövligt föredrag och fick en jättestor guldmedalj av Kapstadens borgmästare. Det bästa föredraget hölls utan tvekan av Peter Sarnak, som hade modet att stänga av den värdelösa ljudanläggningen, så man kunde höra vad han sade. Då Sarnak såg att jag var från Lund, sade han: ”You are from the same place as the tough guy”. Du menar Hörmander, sa jag. Då berättade Sarnak följande historia från Stanford: Hörmander hade muntlig tentamen och tentanden hade tuppat av. Då Sarnak kom in, stod Hörmander och hällde vatten på tentanden, som kvicknade till. ”Varefter Hörmander omedelbart fortsatte förhöret”.

I Nationalencyklopedin finns det ovanligt många artiklar om matematik. Några är mycket avancerade (ofta skrivna av Roos eller Hörmander). Men många utländska stora matematiker har inte kommit med. Låt mig berätta hur jag lyckades få in Ramanujan. Jag satt i Socialnämnden i Höör. Där fanns ytterligare en person, som kunde räkna procent, nämligen sekreteraren (ni kan inte ana hur dåliga politiker är även då det gäller de enklaste beräkningar) . Jag stöter på henne i sovvagnen från Stockholm. Hon presenterar mig för sin man som råkar vara astronom och redaktör för NE:s matematik och fysik. Den kvällen övertalar jag honom att ta med Ramanujan. Mest saknar jag Painlevés namn. Förutom en stor matematiker var han två gånger Frankrikes premiärminister. I ”Ugglan” finns till och med hans första ekvation utskriven.

I slutet av 80-talet cirkulerade följande problem (Somosföljden): Låt $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$ och

$$a_n a_{n-4} = a_{n-1} a_{n-3} + a_{n-2}^2$$

Visa att alla a_n är heltal. Det finns ett elegant bevis av Henrik Eriksson. Hemligheten är att a_n är ett Laurentpolynom i variablerna a_0, a_1, a_2, a_3. Detta i sin tur beror på ett divisibilitetsmirakel och har systematiserats av Zelevinsky och Propp. I början av 1900-talet klassifierade Painlevé och hans elever icke-linjära differentialekvationer av andra ordningen utan rörliga singulariteter, som inte var poler. Det finns sex olika klasser $P_I, P_{II,...,} P_{VI}$. För de fem sista uppkommer icke-linjära differensekvationer med polynomlösningar. Jag studerade följande allmänna problem: Antag $P_0 = P_1 = 1$ och

$$P_{n+1} P_{n-1} = f \cdot (P_n P_n'' - P_n'^2) + g P_n P_n' + h P_n^2$$

där f, g, h är polynom utan gemensam faktor och oberoende av n. Då är alla P_n polynom om och endast om

$$f \cdot f'' - f'^2 + 3f'g - 2fg' - 2g^2 = 0$$

Det märkliga är att man kan precis bestämma de polynom, som löser denna ekvation:

(a) f är godtyckligt och $g = \frac{1}{2} f'$ eller

(b) $f = (ax+b)^k$ och $g = a(ax+b)^{k-1}$

Teorin för icke-linjära differensekvationer är hittills outvecklad om den ens existerar.

Jag hittade ett fel i en artikel av Yuan och Li i Can. J. Math. (2002). Där påstår man att ha hittat alla rationella lösningar till P_{VI} (vilket hade varit en sensation) Jag korrigerede felet men tidskriften refuserade min rättelse (den var ganska lång). Lyckligtvis finns *arXiv*. Med hjälp av teknik utvecklad av japanerna Okamoto och Umemura fann jag senare en 4-parametrisk rationell lösning till P_{VI}. För övrigt är litteraturen om Painlevéekvationer infekterad av tryckfel (och andra fel). Australiern Cosgrave fann mer än 100 allvarliga fel i Kap. XIV i Ince (som handlar om Painlevéekvationer). T.ex. borde de 50 fall, som Painlevé undersökte, vara åtminstone 71.

Ett annat fel av en kines fann jag i J. Number Theory. Det gällde en olikhet av Vinogradov. Felet inträffade redan för $m = 8$ och kunde ha upptäckts på en miniräknare. Jag utvecklade en sorts summationsformel á la

Euler för den ändliga Fouriertransformationen och förbättrade Vinogradovs olikhet till

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\left|\sin(\frac{nj\pi}{m})\right|}{\sin(\frac{j\pi}{m})} < \frac{4m}{\pi^2}(\log(m)+\gamma) + \frac{m}{120} + ...$$

där $\gamma = 0.577$ är Euler's konstant och m och n är positiva heltal. För fixt m inträffar maximum nära $n = (\sqrt{2}-1)m$, för vilket ingen förklaring finns Artikeln blev aldrig publicerad.

Bill Gosper fann formeln

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{50n-6}{\binom{3n}{n}2^n}$$

Den kan bevisas med hjälp av

$$\frac{1}{\binom{3n}{n}} = (3n+1)\int_0^1 x^{2n}(1-x)^n dx$$

Joakim Pettersson och jag visade att formeln ovan kan generaliseras till

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_k(n)}{\binom{8kn}{4kn}(-4)^{kn}} \quad \text{för varje} \quad k \geq 1$$

där S_k är ett polynom med rationella koefficienter av grad $4k$, om en viss determinant var skild från noll. Determinanten var t.ex. för k=5 (matrisens storlek 440×440)

$$\det(M_5) = 2^{5399}3^{290}5^{345}7^{93}11^{41}13^{37}17^{33}19^{32}23^{10}29^{7}31^{6}37^{3}$$

Vi skickade våra resultat till världens störste expert på determinanter, Christian Krattenthaler i Wien. Han inte bara fann en explicit formel för $\det(M_k)$ utan han bevisade den också. Det är en otrolig prestation (den finns närmare beskriven i en artikel i $arXiv$).

$$\det(M_k) = (-1)^{k-1}2^{32k^3+24k^2+2k-1}k^{8k^2+2k} \cdot ((4k+1)!)^{4k}\frac{(8k)!}{(4k)!}\prod_{j=1}^{4k}\frac{(2j)!}{j!}$$

Det finns alltså formler för π för vilka redan första termen ger hur många rätta decimaler som helst.

Krattenthaler är utbildad pianist av hög klass. Nyligen fick han Wittgensteinpriset som är ett och halvt Nobelpris. Jag frågade honom om jag kunde hjälpa honom att göra av med pengarna. Han svarade att de skulle bara användas för att köpa Ferraris och Bösendorfer.

Strängteorin står inte högt i kurs i Sverige. Bengt E.Y. Svensson skrev för ett par år sedan en helsidesartikel i DN med titeln ”Kultteori, inte ens fel”.

Witten kommer aldrig att få Nobelpriset. Men det finns mycket intressant matematik, som kommer från strängteorin. I början av 2000-talet skrev jag en artikel i Normat med den romantiska titeln ”Strängar i månsken”. Där visas på analogin mellan ”moonshine-funktionen” $j(q)$ och ”mirror-funktionen” i strängteorin. Båda kan fås från två lösningar till en linjär differentialekvation (av ordning två respektive fyra)

$$y_0 = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

$$y_1 = y_0 \log(x) + b_1 x + b_2 x^2 + ...$$

och genom att gå över till variabeln

$$q = \exp(\frac{y_1}{y_0}) = x + e_2 x^2 + ...$$

Man kan lösa ut ”spegelfunktionen”

$$x = q - e_2 q^2 + ...$$

Strängteorins 10 dimensioner består av 3 +1 i rumtiden plus 6 osynliga dimensioner. Dessa 6 reella dimensioner kan tolkas som en 3-dimensionell Calabi-Yaumångfald i P^4. Det numera klassiska exemplet är ”the Quintic”

$$X_0^5 + X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 + X_4^5 = 0$$

De tillhörande perioden y satisfierar den hypergeometriska differentialekvationen ($\theta = x\frac{d}{dx}$)

$$(\theta^4 - 5^5 x(\theta + \frac{1}{5})(\theta + \frac{2}{5})(\theta + \frac{3}{5})(\theta + \frac{4}{5}))y = 0$$

I fysiklitteraturen fann jag ytterligare 12 hypergeometriska ekvationer. Själv fann jag den 14:e

$$(\theta^4 - 12^6 x(\theta + \frac{1}{12})(\theta + \frac{5}{12})(\theta + \frac{7}{12})(\theta + \frac{11}{12}))y = 0$$

Andra villkor är att y_0 och q skall ha heltalskoefficienter. Antag att vi har en tredje lösning

$$y_2 = \frac{1}{2} y_0 \log^2(x) + (b_1 x + b_2 x^2 + ...) \log(x) + f_1 x + ...$$

Då kallas

$$K = (q\frac{d}{dq})^2 (\frac{y_2}{y_0})$$

för Yukawakopplingen. Den kan skrivas som en Lambertserie

$$K = 1 + \sum_{d=1}^{\infty} d^3 c_d \frac{q^d}{1 - q^d}$$

Det märkliga är att även c_d blir heltal (instantontal) och antas räkna antal kurvor av grad d på mångfalden (detta gäller inte för "the Quintic" om $d > 8$). Om differentialekvationen skrives

$$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

så gäller

$$a_1 = \frac{1}{2}a_2 a_3 - \frac{1}{8}a_3^3 + a_2' - \frac{3}{4}a_3 a_3' - \frac{1}{2}a_3''$$

Detta formaliserade jag och kallade ekvationer som satisfierar detta villkor för Calabi-Yaudifferentialekvationer (C-Y).

Duco van Straten et al hade funnit ytterligare 14 C-Y-ekvationer som inte var hypergeometriska. 2002 träffar jag Wadim Zudilin i Köpenhamn. Han är född i Moldavien och hade Victor Ufnarovski som coach då han gick i gymnasiet. Han studerade i Moskva och har mest hållit på med analytisk talteori. Han innehar världsrekordet i Apéryköret: Av talen $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ är minst ett irrationellt. Han fick idén att studera wronskianen

$$w_0 = y_0 y_1' - y_0' y_1$$

där y_0 och y_1 är lösningar till en 4:e ordningens differentialekvation. Då satisfierar w_0 en 5:e ordningens differentialekvation om och endast C-Y-villkoret är uppfyllt.

Zudilin hade redan en 5:e ordningens differentialekvation, som kom från talteorin. Den visade sig komma från en 4:e ordningens C-Y-ekvation. Nu var jakten igång. I Mainz startade van Straten och hans elever en datorsökning av ekvationer av grad två av följande typ

$$\theta^4 - x(A\theta^4 + 2A\theta^3 + (A+B)\theta^2 + B\theta + C) + x^2(v\theta+u)(v\theta+2v-u)(t\theta+w)(t\theta+2t-w)$$

med heltalslösningar. De sökte också efter ekvationer av ordning två och tre, ty de kunde i vissa fall användas till att konstruera C-Y-ekvationer genom Hadamardprodukten. Låt

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Då är Hadamardprodukten

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = u * v = \sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n x^n$$

Ännu mera givande är att starta med koefficienterna A_n och använda "Zeilberger" i Maple. T.ex om

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^5$$

så svarar Maple med en rekursionsformel för A_n som lätt omvandlas till en differentialekvation. Idetta fall blir den av ordning sex, men Maple faktoriserar den lätt och högerfaktorn är av ordning fyra.

Inspirerad av Peter Paule och Carsten Schneider prövade vi även

$$''A_n'' = \sum_{k=0}^{n}(n-2k)\binom{n}{k}^7$$

som är identiskt noll på grund av symmetrin $k \to n-k$. Men lyckligtvis upptäcker Maple inte detta utan svarar snällt med en rekursionsformel, som leder till en C-Y-ekvation. Den riktiga koefficienten får man genom att derivera $''A_n''$ med avseende på k.

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^7\{1+7k(-H_k+H_{n-k})\}$$

där

$$H_n = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \quad \text{för} \quad n>0 \quad \text{och} \quad 0 \quad \text{annars.}$$

är de harmoniska talen.

Ibland lyckas inte detta utan man måste även summera över negativa k. Detta förklarades för mig av Krattenthaler. En C-Y-ekvation, som vi ännu inte känner en formel för koefficienterna fås av

$$''A_n'' = 256^{-n}\sum_{k=0}^{n}(n-2k)\binom{n}{k}^{-5}\binom{2k}{k}^6\binom{2n-2k}{n-k}$$

Kreuzer och Skarke har funnit alla reflexiva polytoper i $\mathbf{R}^4$ med hörn i $\mathbf{Z}^4$ med origo som enda inre punkt. Det finns 473800652 av dessa (de ligger på nätet och man trycka 1000 åt gången). För hörnet (a,b,c,d) associeras Laurentmonomet $x^a y^b z^c t^d$. Sedan adderas dessa monom för alla hörn så man får ett Laurentpolynom P. Därefter får man $A_n =$ konstanta termen i P^n. T.ex. får man får man för "the Quintic"

$$\frac{(5n)!}{n!^5} = c.t.\left\{(x+y+z+t+\frac{1}{xyzt})^{5n}\right\}$$

Kreuzer envisas med att använda "brute force" vilket betyder räknetider av storleksordningen månader för att hitta de 60 första koefficienterna för en polytop med 18 hörn. Vi (van Straten med elever och jag) eliminerar en variabel och minskar räknetiderna med en faktor av storleksordning 500-1000. Men vi har hittills bara funnit ett fåtal nya C-Y-ekvationer på detta sätt. Metoden är numera suspekt. Metelitsyn, Schömer och van Straten beräknade 272 koefficienter för en polytop med 18 hörn och fann en differentialekvation av ordning 6 och grad 25. Den går inte att faktorisera och är alltså inte C-Y.

Vidare har C-Y-ekvationer hittats av Helena Verrill och Tony Guttmann. De förra kan också fås som speglingar i oändligheten för ekvationer som hänger ihop med moment av Besselfunktioner (Jon Borwein et al). Guttmanns ekvation är av grad sju och kommer från ”random walk” i fyra dimensioner.

I juni 2006 organiserades en konferens om ”Modular forms and string duality” i Banff i Kanada av Charles Doran, Helena Verrill och Noriko Yui. Jag höll föredrag om ”Apéry-like limits connected to Calabi-Yau differential equations”. Det blev till en dialog med Zagier, som satt längst fram och frågade om allt. Föredraget spelades in för att läggas ut på nätet. Andra deltagare var George Elliott (gift med Yui. De bodde länge i Köpenhamn), Jan Stienstra och Albrecht Klemm. Jag fick för första gången chansen att diskutera med Zagier.

Senare har jag varit på Max Planckinstitutet i Bonn två gånger. Första gången hade jag ett långt samtal med Hirzebruch på omväxlande engelska och tyska. Han fyllde 80 dagen efter. Andra gången fick jag eget kontor.Telefonen ringde. Det var Zagier i Paris. Han föreläste om ”C-Y-differentialekvationer” vid College de France och hade en del frågor. Jag höll jag föredrag om den ”metafysiska metoden” åter med Zagier på första bänk. Vid ”talteorilunchen” diskuterade Vershik och jag Hardys nyårslöften (”prove the Riemann hyothesis, kill Hitler, climb Mount Everest, become the first president of the Socialist Republic of England”). I synnerhet det sista intresserade Vershik. Jag citerade hans ”inauguration speach” då han flyttat till Oxford: ”My mathematics has not extended the empire by one inch, it has not even killed a black man”.

En kväll var det ”Friedrich Hirzebruchvorlesung” på fakultetsklubben i Bonn. Föreläsare var författaren Hans Magnus Enzensberger och Don Zagier. Det hela inleds med en oändlig presentation av honoratiores (Herr Professor Doktor Friedrich Hirzebruch mit Frau, etc). Man räknar upp alla som fått någon utmärkelse av staden Bonn. Av misstag nämner man Gerd Faltings och måste korrigera detta. Det är rätt pinsamt ty Faltings är närvarande (och förmodligen den ende Fieldsmedaljören). Enzensberger är filosofisk och mycket underhållande. Sedan kommer Zagier. Han talar även tyska med en oerhörd hastighet och jag har problem att hänga med. Han sade att ofta kan man inte avgöra om ett resultat kunde vara av betydelse någon gång i framtiden. Som bekant är det vanligt att matematiker yttrar sig nedlåtande om andras arbeten (inte minst i Lund). För att illustrera detta tog Zagier två talföljder:

1. $2, 5, 3, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 2, 5, \ldots$ Regeln är

$$a_{n+1}a_{n-1} = a_n + 1$$

Perioden är 5.

2. $2, 5, 3, -2, -1, 3, 4, 1, -3, 2, 5, \ldots$ Regeln är

$$a_{n+1} + a_{n-1} = |a_n|$$

Perioden är 9.

Zagier frågar vilken av följderna som är av betydelse (han räknar upp flera områden, bl.a. K-teori). Att visa att den första följden har perioden 5 är lätt, han ger själv ett 15-sekunders bevis. Den andra är svårare. Men det är den första som är av betydelse. Detta är lysande pedagogik, begriplig för alla. Efteråt säljer man Enzensbergers böcker på ett bokbord. Han har översatt en diktbok av Lars Gustafsson ("som räknar obehindrat med icke-abelska grupper").

När jag är i Bonn brukar jag också besöka Duco van Straten i Mainz. Första gången han var i Höör var det snö och han fick åka skidor för första gången i sitt 46-åriga liv. Efter mycket besvär klarade han en liten tefatsbacke utan att ramla. En vecka senare ringer han mig och säger att han skall till Davos. Det måste vara hans sportiga tyska fru som lurat dit honom. En gång sade hon under en vådlig färd i hennes 245:a från 1987: "Im nächsten Leben werde ich Rennfahrer sein".

Matematiska Sällskapet i Lund.

I Lund har vi ett Matematiskt Sällskap. Det grundades på 20-talet och Tage Erlander var dess förste ordförande. Varje termin har vi tre populära föredrag för allmänheten. På 60-talet var sällskapet rikt då intäkterna från boken om differentialekvationer av H.Gask var stora. Då arrangerades subventionerade fester. Vi hade en särskild konjaksflaska för Marcel Riesz. Då jag berättade att jag hade gått på Teknisk Fysik på KTH, sade Riesz: "Du Almkvist, för mig har Teknisk Fysik alltid varit Sandviken". Apropå Sandviken, så har jag en gång haft två av dess utmärkta fogsvansar i ryggsäcken, då jag reste till Oberwohlfach. De var avsedda för Fossum, som ville imponera på sin nye svärfar.

Vi har haft många illustra föredragshållare. Conway stod på huvudet då han skulle förklara ett topologiskt begrepp. Sedan gjorde han en ritning till mig om hur man skall konstruera en av hans magiska lådor. Han visade också hur man kan slå vad om vilken sida som kommer upp då man snurrar pennies eller ställer dem på högkant. Första gången jag mötte Conway var i Fine Hall i Princeton, då han kom med en stack kopior av sina egna bara fötter i olika vinklar. Han hade stått på kopieringsmaskinen. Han skulle hålla föredrag för alumni om symmetrier.

Fieldsmedaljören Vaughan Jones talade om knutar. Då jag var ordförande var huvudnumret Gårdings prisbelönta dialog om när von Neumann möter Gud. Då var salen full. Gårding själv spelade Gud och Per-Anders Ivert var en mycket övertygande von Neumann. Dialogen översattes till engelska och uppfördes åter under konferensen då Gårding fyllde åttio. Gårding var åter Gud och ungraren Peter Lax spelade von Neumann.

En annan gång då salen var full, var då jag talade om Wiles bevis för Fermats Sista Sats. Tyvärr fick jag dagen innan ett e-mail, att man hade hittat ett fel i beviset. Henrik Eriksson höll ett fascinerande föredrag om diverse spel och sina kontroverser med Alga i Vittsjö. Ett annat bejublat föredrag hölls av konstnären Oscar Reutersvärd och Gunnar Sparr gemensamt om omöjliga figurer. En gång då Kimmo Eriksson höll föredrag avslutades det hela med att Kimmo och Torbjörn sjöng en ny version av en glunt där studenten somnar på Hörmanders föreläsning. Henrik acompanjerade på gitarr.

Elever.

Jag har haft tre elever som har disputerat under min ledning. Egentligen är det bara formellt för alla tre, ty alla har skött sig själva. Torbjörn Tambour kanske fick ämnet från mig, icke-kommutativ invariantteori. Leif Melkersson fick en hel del social rådgivning men valde själv ämne. Dmitri Apassov skickade jag till Foxby i Köpenhamn. Jonas Månsson gjorde ett fint examensarbete för mig. Han läste Rankins svåra bok om modulära funktioner. Då han inte förstod något skrev han till Rankin och fick svar! Anna Torstensson hade ett liknande ämne och var också duktig. Båda disputerade sedan för Ufnarovski och är nu lektorer på LTH. Jonas farfar kallades för Långemåns och delade ut ransoneringskorten hemma i min by. Gudrun Brattström var den ende som tenterade en kurs i talteori jag hade. Av misstag råkade jag ge en förmodan av Ramanujan i hemtentan. Gudrun klarade detta (Nagell hade gjort det 1949). Hon disputerade i talteori på Cornell och var sedan i Paris och på Harvard i flera år. Hon berättade följande historia hon hört från säker källa. Bourbaki hade skrivit en bok färdig. Detta skulle firas på en fin restaurang. De ville emellertid bara släppa in Serre, som hade slips. Då halar Serre upp 14 slipsar ur fickan!

Henrik Eriksson disputerade vid 54 års ålder i kombinatorik för Anders Björner. Vid festen efteråt framförde hans mångbegåvade barn med sambor en mycket rolig revy. Tidigare hade han arbetat ett tiotal år på TRU och gjort TV-program. Han är en fantastisk pedagog och har fått alla upptänkliga pris, inklusive ett från Ångpanneföreningen. Han var medlem i Hedenius Humanistorganisation men inte särskilt aktiv. Då han möter en annan medlem blir han ombedd att deltaga i en diskussion om realismen en månad senare. Då han kommer dit blir han satt i en stol vänd mot auditoriet och hans vän säger: ”Idag har vi nöjet att ha Henrik Eriksson här” och överlämnar ordet. Henrik säger: ” Idag skall vi diskutera rationalismen”. Nej, säger hans vän. Ämnet är ”Den moderna fysiken och Guds existens”. Varpå Henrik talar en timme om detta ämne! Numera är Henrik 67 och vägrar att bli pensionerad. Han stöds av en tidigare elev, som är IT-miljardär och har lovat att betala rättegångskostnader ända upp i Europadomstolen.

Den mest begåvade av alla elever jag haft är nog Joakim Petersson. Han gick på min kurs i Analytisk Talteori. I en paus kommer han fram och visar en mycket vacker reciprocitetssats för Bernoullital (den är fortfarande inte publicerad). Så småningom kryper det fram att han har ett nästan färdigt examensarbete för Hörmander, men han hoppade av och läste franska. Jag får honom att återuppta exjobbet men Hörmander är nu pensionerad så Christer Bennewitz får ta över. Exjobbet görs färdigt. Det handlar om "wavelets" och Hörmander säger att det är nästan en licavhandling. Joakim blir doktorand men trivs inte med handledaren och hoppar av igen (hans far dör). Jag övertalar Adrian Constantin att ta sig an Joakim. Det slutar med att Joakim disputerar. Själva disputationen blir dramatisk. Opponenten är från Paris. Han har tappat sitt pass men försöker ändå flyga till Köpenhamn. Det misslyckas. Han ringer till Adrian, som kör för att hämta honom vid franska gränsen. På vägen tillbaka bryter bilen samman nära Hamburg kl 5 på morgonen. Disputationen är kl 10 men flyttas till kl 15. De hyr en bil och anländer med en halvtimmes marginal till Lund. Kl 3 nästa natt kör Adrian opponenten till Hamburg och hämtar sin lagade bil.

Sakkunnighetsuppdrag och betygsnämnder.

Jag har varit sakkunnig många gånger, oftast i Stockholm. I Uppsala har jag lyckats få tre algebraiker anställda, två tyskar och en från Kiev. I Stockholm minns jag ett möte i det gula huset på Drottninggatan med alla tavlorna. Arnfinn Laudal, med erfarenhet från kommunalpolitik i Oslo, övertygade med lysande retorik några pedagoger att vår kandidat var bäst. Sista gången jag var sakkunnig var på KTH. Det var 71 sökande och handlingarna kom med lastbil. Det verkade som om de tre andra sakkunniga alla var experter på Schrödingerekvationen och jag fick ta hand om allting annat. Med god hjälp av tjänsteförslagsnämnden fick jag två talteoretiker överst.

Av betygsnämnder minns jag bäst då en av Jan-Erik Björks elever disputerade. Jag bodde hos Jan-Erik på Freijgatan, ett stenkast från institutionen på Hagagatan. Då disputationen var över samlades vi (de andra var Christian U.Jensen och Idun Reiten) i Jan-Eriks rum. Problemet var att det papper vi skulle skriva på hade försvunnit. Vi letade ett tag och jag var tvungen att gå ner och lugna respondentens föräldrar som hade dukat upp för fest. Det var fredag eftermiddag men vi lyckades få ett nytt papper faxat från Frescati. Nästa dag var det en liten konferens där även Maurice Auslander var närvarande. Efteråt bjöd Björk alla på middag i sin lägenhet. Då hittades papperet.

Det har varit ett par underliga disputationer de senaste åren. På KTH kom en avhandling med ett förord på 16 sidor där en stor del av Stockholms matematikerkår (inklusive sekreterarna) förolämpades grovt. T.ex. kallades Jan-Erik Roos för maffiabossen (han åkte faktiskt till Chicago vid tiden för disputationen). På LTH kom en avhandling med en enorm lista av referenser. Då Laksov frågade om någon av alla dessa referenser hade använts vid något bevis kunde respondenten inte ange en enda.

Institutionen i Lund.

Till sist skriver jag något om mina kolleger i Lund. Med Gårding har jag alltid kommit bra överens. Det enda riktigt positiva omdöme jag fått i ett sakkunnighetsutlåtande var Gårdings, ”Almkvist är en medryckande författare”. Vi hade en dispyt om vad Kronecker egentligen sade (”Der Liebe Gott hat die ganzen Zahlen geschafft, alles andere ist Menschenwerk”). Jag lånade honom två böcker om fågelsång då han skrev en bok om detta ämne. Jag tillägnade min senaste artikel till hans 90-årsdag.

Gårding kallade alla byråkrater, oberoende av rang, för kamrern. Roos hade doktorandstipendium och behövde ett intyg från Gårding. Då han kom in höll Gårding på att öppna ett paket. Han rev av ett hörn av det bruna omslagspapperet och skrev på det.”Nu kan de djävlarna inte sätta in det i sina pärmar”.

Genom att ha en systematisk oordning på mitt skrivbord ansågs jag vara oduglig som administratör och slapp att vara studierektor bortsett från en månads vikariat. Då utförde jag en enda administrativ handling. Vi hade fått åtta kronor per elev för ”social samvaro”. Vi fick ett brev där vi skulle utvärdera detta. Gårding stod bredvid mig då jag öppnade brevet. ”Nu skall jag lära dig att administrera”, sa Gårding. ”Hur har intresset varit?”. ”Blandat”,sade jag. ”Då skriver du det på papperet du fick och ditt namn under och skickar det tillbaka”. Detta påminner mig om poeten Wadman, som hade hand om utspisningen i Karl XIV Johans arme. Efter kriget fick han en förfrågan var brännvinet blivit av. Han svarade ”Ursupet”.

Hörmander har hjälpt mig en hel del. Han låg bakom bytet med Cordes, som gjorde att jag kom till Berkeley 1970. Han gjorde beräkningar åt mig innan Maple kom. En gång höll Aster Lindell på att skriva ut en artikel åt mig. Hörmander kom in och såg att det förekom dubbla rottecken. ”Det klarar du aldrig, Aster” sade Hörmander. ”Låt mig försöka!” En gång visade jag honom ett elegant bevis i ringteori. Direkt kom han med ett annat bevis, där han använde Hilberts Nullstellensatz. Men vi har också haft våra sammanstötningar. Då han var på Mittag-Lefflerinstitutet fick Tambour och jag i uppdrag att revidera doktorandkurserna. Det gjorde vi också med besked. Bl.a. införde vi några kurser i geometri, t.ex. Coxeters ”Introduction to geometry”. Men vi hade otur. Hörmander kom hem just då vi skulle ha sammanträde om doktorandkurserna. Vi fick världens utskällning: ”Vi hade bara tillgodosett våra egna intressen. Det fanns minst 50 analysböcker som var viktigare än dem vi föreslagit. Coxeters bok består bara av gruppteori”. Så det blev vid det gamla, kanske ännu mera analys.En gång hjälpte vi Hörmander med att lösa ett icke-linjärt ekvationssystem i tre variabler. Torbjörn fann lösningen och jag förenklade den genom att invertera variablerna.

En gång blev vi utvärderade. Hörmander skötte presentationen av institutionen. Han glömde Nils Nilsson så Malgrange fick påpeka hans existens.

Mer än halva tiden gick åt till att visa kapitelrubriker i de fyra böcker om PDE som Hörmander höll på att skriva. Det kanske representerade fördelningen av forskningen på institutionen, men det hade sett snyggare ut om någon annan framfört det, t.ex. prefekten. Men det var naturligtvis omöjligt i Lund. Prefekten visste ingenting om institutionens forskning.

Nils Nilsson är en framstående matematiker. I Paris är han berömd för ”Classes des Nilsson”. Han har lidit av trycket från de två stora och idkat självcensur. Men det är skandal att han har haft en av institutionens lägsta löner. Nisse fick den berömda laboraturen i Lund. I hans pass översattes titeln med ”demonstrator”, vilket gjorde att han skulle ha haft stora svårigheter att komma in i USA.

Jaak Peetre såg jag första gången, då han iklädd vapenrock provföreläste på KTH för professuren på LTH. Vi har haft goda relationer för det mesta. En gång frågade jag honom om han kom på mitt seminarium. ”Det får bli i ett annat liv”, svarade han. En tid efter pensionen delade vi rum och hade bara en dator. Jaak bodde i Kåseberga och visade sig bara sporadiskt på institutionen. Men då kunde han logga in och gå någon annanstans. Jag skällde ut honom men då gav han mig sina memoarer med en vänlig dedikation.

Sven Spanne tillhörde gänget som tidigt åkte till Paris med Roos. Han var också medverkande vid tillkomsten av kompendiet i Homologisk Algebra. Senare hade vi en seminarieserie om Fultons bok om Algebaiska Kurvor. Nils Övrelid från Oslo var också med.

Jan Gustavsson var elev till Peetre. Han har alltid ställt upp då jag har haft frågor om analys. För ett år sedan skrev vi äntligen en artikel ihop. Den handlar om då summan blir lika med integralen. Låt $f(x)$ vara en jämn, tillräckligt snäll funktion. Då gäller

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

om och endast om

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(2\pi n) = 0$$

Speciellt är detta sant om $\widehat{f}$ har sitt stöd i $(-2\pi, 2\pi)$. Det finns massor av exempel.

I början av 90-talet fick Arne Meurman Gustafssonpriset på drygt två miljoner. För dessa pengar (”Herr Arnes penningar”) bjöds flera personer in. Primc kom ett år från Zagreb. Issai Kantor var en av pionjärerna inom oändligtdimensionella Liealgebror. Hans arbeten från mitten av 60-talet var knappast kända i väst och så fick de nya algebrorna namnet Kac-Moody. Kantor blev inbjuden på ett år och sökte lektorat. Han fick det efter att Hörmander hade lyssnat på hans föreläsningar för att bedöma pedagogiken.

En annan som blev inbjuden på Meurmans pengar var moldaviern Victor Ufnarovski. Han studerade i Moskva och hade skrivit en intressant bok. Jag fick hans e-mailadress från John McKay, som försökte få honom till Montreal. Victor sökte också lektorat men på LTH. Han höll provföreläsning på svenska efter att jag coachat honom. Numera är han en omtyckt föreläsare och har haft många doktorander. Han är också ledare för ett samarbetsprojekt med Chişinău där också Stockholms Universitet ingår.

I mitten av 90-talet flyttade Gudrun Gudmundsdottir och Christer Bennewitz till Lund från Birmingham, Alabama. Gudruns storebror Gudmundur var klasskamrat med mig på KTH. Vi brukade spela schack. En gång då Christer besökte IAM tog han första bandet av Meyers Konverationslexikon från 1897, för att kontrollera dess kvalitet. Den var god, ty han fann sin förfader Peter Bennewitz (latiniserat till Apianus) som var astronom på 1500-talet i Ingolstadt. Christer organiserade konferensen vid Gårdings 80-årsdag som var ett enormt projekt.

Någon gång på 80-talet var Gunnar Sparr och jag i betygsnämnden för en avhandling på reglerteknik. Gunnar förenklade beräkningarna betydligt och skrev en artikel. Detta var början till bildanalysen, som senare har dominerat institutionen på LTH och blivit en mångmiljonindustri. Det vore nog bättre om bildanalysen blev en självständig institution skild från matematiken.

Jag flyttade till Lund mest för att Jan-Erik Roos var där. Han skrev på en diger doktorsavhandling om Grothendieckkategorier. Våren 1970 sökte Jan-Erik en professur i Stockholm. Hörmander var sakkunnig och Jan-Erik höll en serie föreläsningar riktade till Hörmander som noggrannt antecknade. Jag hade en sorts förberedande kurs om ringar och moduler. Det var nog den kursen som fick Hans-Uno Bengtsson att bli fysiker. Han sade själv att då vi "kom till ämnet ormlemma så lämnade han matematiken". Jan-Erik fick tjänsten utan att ha disputerat (liksom Karl-Johan Åström i Reglerteknik i Lund). Nyligen frågade mig Hörmander om den där doktorsavhandlingen någonsin blev publicerad. Jag svarade: Bara som CR-noter (här hade jag fel. Stora delar av avhandlingen publicerades i Springer Lecture Notes). Vad Hörmander sedan sade lämpar sig inte för tryck.

Då Jan-Erik pensionerades var jag den ende som höll tal vid middagen. Jag framhöll då den metamorfos som han genomgick då han lämnat Lund. Här var han en bohem. Man kunde knappt komma in i hans lägenhet ty det låg böcker överallt på golvet. Hans resväskor stod packade för att han snabbt skulle kunna resa till Paris. I Stockholm blev han den perfekta administratören. Han gifte sig och köpte ett stort hus i Uppsala. Han har haft otaliga elever och utvidgat institutionen betydligt. Här i Lund har vi fortfarande bara en professur på LTH.

Det som upprört mig mest på institutionen var nog då Hörmanders efterträdare skulle utses. Min vän Vladimir L. Popov från Moskva sökte. Han är en "världsmatematiker", för att låna ett uttryck från sportvärlden. Alla utanför den svenska ankdammen blir förvånade att han inte fick tjänsten. Bland de krystade formuleringar från de sakkunniga fanns, att han var för gammal (48 år), att det var förutbestämt att analys skulle ha företräde. Jag hjälpte Popov att överklaga. Tillsättningen tog tre år. Bland de sökande fanns också Peetre och Enflo (som löst två av Banachs problem). Den franske sakkunnige skrev det nästan äreröriga " I would not bet 25 $ on Enflo's future as a mathematician". Året innan hade han höjt Enflo till skyarna. Jaak kallade honom "den franska virrpannan" i sitt överklagande. Men detta var inte första gången Lund missade en framstående matematiker. Sophus Lie sökte den tjänst som Björling fick (Gårding beskriver detta i sin bok om svenska matematiker).

En verklig tillgång för institutionen var Adrian Constantin, så länge det varade. Han hade vid 30 års ålder skrivit nästan 100 artiklar. Han fick samma lön som en lektor på LTH med noll artiklar. När sedan Dublin erbjöd honom 100000 i månaden så är det inte så konstigt att han flyttade. Men det var också andra orsaker till att han flyttade (spiken i kistan var nog då två professorer i Uppsala blev sparkade). Men före detta hade åtskilligt hänt. Constantin, Melin och Meurman skrev ett brev till rektorn, där de påpekade vissa missförhållanden på institutionen. Brevet var offentlig handling och kom nästa dag i Sydsvenskan. Det blev minst sagt ett herrans liv. Constantin och hans fru (som var doktorand vid institutionen) erbjöds av dekanus, ett års lön om de försvann från Lund. Det förvånar mig att dekanus kan ge bort en miljon så där utan vidare. Det visar också administrationens förakt för vetenskapen. Constantin var institutionens klart lysande stjärna. Han producerade under sin korta tid i Lund fyra doktorer.

Jag minns inte vad det stod i det famösa brevet, men jag kan nämna ett par saker som verkar underliga. T.ex hade prefektens son 500:- mer i månaden än alla andra doktorander. Ett par befodringar helt utan sakkunnighetsförfarande på LTH har också upprört. Sålunda skulle X befodras till universitetslektor (på livstid). X hade skrivit en lic-avhandling som inte var ett mästerverk. Jan Lanke frågar Jaak Peetre: Kan man inte tänka sig en doktorsavhandling, som är lika dålig som X:s lic-avhandling? Jaak: Nja, det kanske man kunde tänka sig. Lanke (med emfas): Då är han kompetent! Det andra fallet ägde rum i fakulteten på LTH. Tio lektorer hade sökt att befodras till biträdande professor. Fakulteten beslöt att befodra sex. Därefter hade man en eurivisionsschlageromröstning för att utse dessa. En av vinnarna var Bodil Jönsson, känd för att ha skrivit en bestseller, Tankar om tid (Einstein kan vara lugn i sin himmel. Bodil är inte i närheten av relativitetsteori). Sigmundur Gudmundsson och jag gjorde en undersökning, där vi avsatte antalet artiklar enligt Math. Review på x-axeln och månadslönen på y-axeln. Regressionslinjen hade negativ lutning: För varje artikel man skrev fick man 53:- lägre månadslön.Vi kallade detta tal för "publish *and* perish index". T.ex. hade en vikarierande gymnasielärare med bara lic-examen högre lön än Meurman. Amerikaner tror inte på detta då man berättar det för dem.

Gårding chockerade en gång pedagogerna med att säga att matematik är ett svårt ämne och många som studerar det borde ägna sig åt något annat (Riesel lär ha sagt: Det finns ju hushållsskolor). I början av 70-talet var jag en termin på LTH. Jag hade en M-grupp som hade kommit in på 2,3 poäng. Efter halva terminen hade vi en tenta som var på gymnasienivå. Alla 16 blev underkända. Mycket av min undervisning bestod av att förklara att kvadratroten och sinus inte var additiva. För något år sedan var det stor uppståndelse om hur dåliga förkunskaper de nya eleverna hade. Då försäkrade studierektorn på LTH att "låt alla komma hit, vi skall nog ta hand om dem". Det är slöseri med statens medel. Den vanligaste reaktionen man får då man säger att man är matematiker är: Matematik var mitt sämsta ämne. Jag har ännu aldrig träffat någon som skryter med hur dåliga de är i engelska.

Nästan varje stad har numera en högskola eller åtminstone en filial. Jag har en misstanke att det var högre klass på min ungdoms gymnasium. Är det en tillfällighet att mina barn och min svärdotter kallar universitetet för "skolan"?

Jag kanske skulle berätta om ett möte med en icke-matematiker. Wilfried Pigulla läste latin och grekiska i gymnasiet. Sedan studerade han teologi i Rom och blev katolsk präst i Bayern. Efter elva år tappade han tron och blev omskolad till språklärare, men kunde inte hitta något jobb. Han omskolades ytterligare en gång till programmerare och pensionerades vid 60. Med hjälp av en programmerbar miniräknare finner han följande formel (låt n vara delbart med 4)

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ... + \frac{1}{n-1}) + \cfrac{2}{n + \cfrac{1^2}{n + \cfrac{2^2}{n + \cfrac{3^2}{n + \cfrac{4^2}{n + ...}}}}}$$

Konvergensen är mycket snabb och man kan räkna ut π med 1000 siffror på ett par sekunder med dator. Jon Borwein och Steve Choi generaliserade detta så att formeln för π försvann. De satte Pigulla som medförfattare utan att fråga honom (med adress i Vancouver). Jag fick artikeln via Dilcher, som var referee, och skrev ett brev där jag uppmanade dem att skriva om förordet och tala om att hur Pigulla hade funnit formeln för π. Detta gav inget resultat men ledde till att Jon Borwein slutade att citera mig och Granville. Zudilin skrev en rescension i Zentralblatt där han påpekade detta. Något senare åker Zudilin till Newcastle i Australien för att intervjuas om ett jobb. Det visar sig att Jon Borwein är hans blivande boss. Han fick jobbet.

Om matematikutbildning, tillämpningar och svårigheter

Peter Hackman

Så dras utbildningsdebatten ett varv till, och denna gång ett steg ner i stadierna. Professor Johnson angriper i NyTeknik en kraftigt föråldrad bild av gymnasiekursen (det är mer underhållande så) och pläderar för något han kallar IT-matematik utan att komma förbi slagordsnivån. Det är illa ty de som pläderar för IT, "datorstödd inlärning" och liknande slagord har en mycket tung bevisbörda med tanke på all den dynga som smugglats in under sådana varubeteckningar. Jag behöver bara nämna de vettlösa "illustrationerna" av trigonometriska gränsvärden medels räknedosa (Utgjutelse 9, 13) både i gymnasieböcker och högskolelitteratur (en av böckerna heter "Naturlig matematik"!). Eller missbruket av grafritare som *ersättning* för funktionsstudium.

För perspektivet ska jag redogöra för min egen gymnasieutbildning så långt jag minns den. Jag gick realgymnasiet på Nya Elementar (i Stockholm) 1959–1963. De båda första ringarna dominerades av Euklides och diverse manipulativ algebra, t ex aritmetisk och geometrisk summa, binomialsatsen (med induktionsbevis!) och liknande. Geometrin var anlagd på klassiska resultat som likformighetsgeometri samt in- om- och vidskrivna cirklar, med Herons formel (triangelarean uttryckt i sidorna) som kulmen. I tvåan infördes även trigonometrin, som längre fram drevs rätt långt, t ex omvandlingar mellan summor och produkter. Uppgifterna var ofta enkla bevis och konstruktioner med passare och linjal – vilka skulle bevisas.

De båda sista åren (på matematisk gren) dominerades av "funktionslära" (dvs. analys) och "analytisk geometri" (dvs. koordinatgeometri). Analysen drevs fram till fullständiga funktionsundersökningar inklusive asymptoter, lodräta, vågräta och sneda, samt andraderivatans roll (konvexitet).

En sista uppsättning elementära funktioner, exponential och logaritm, infördes. Logaritmer användes till att multiplicera stora tal medels logaritmtabell; räknestickan dög till enklare beräkningar och gav en handgriplig illustration av logaritmens egenskaper. På fysikprov var det den som gällde och man fick träna överslagsberäkning för att sätta decimalkommat rätt.

Geometrin behandlade räta linjens ekvation i ett otal former (k-l-form, enpunkt, tvåpunkt, intercept och normalform) samt kägelsnitt som lösningar till locusproblem, t ex avståndssumman till två givna punkter konstant (ellips). Ekvationerna härleddes i standardlägen, tangenter och normaler härleddes. Ett typiskt result var om diametrar i parabler: locus för mittpunkterna av parallella kordor är en rät linje. Inför sista terminen i RIV var kursplanen avbetad och lärarna gjorde som de ville. Min lärare visade bl a hur kägelsnitten kunde identifieras ur sina ekvationer i godtyckligt läge.

Ämnet ägnades, om jag minns rätt, sju veckotimmar på matematisk gren i RIII och RIV. Det mest slående, utom de många obsoleta momenten, är hur litet stoffet var. Det rymdes i ett fåtal nätta häften.

Komplexa tal på polär form behandlades inte. Vi integrerade inte värre funktioner än polynom. När vi i fysiken behövde integrera $\sin^2 x$ över en hel period hade vi redskapen, men klarade oss utan, ty det är samma som integralen av $\cos^2 x$, alltså samma som medelvärdet som är integralen av $1/2$, och den kunde vi beräkna. Vi löste aldrig differentialekvationer. Vi bör ha varit medvetna om ekvationerna för naturlig tillväxt (eller radioaktivt sönderfall) och svängningar, men inte hur man visade entydighet för givna begynnelsevärden.

Det väsentliga var alltså vad (och hur mycket) som gjordes med stoffet, kvaliteten. Kvalitet är då det som blir kvar när man glömt detaljerna. Behållningen av koordinatgeometrin var färdigheten att översätta geometriska villkor i ekvationer, medan alla specialresultaten var snabbt glömda. Den euklidiska geometrin tränade problemlösning – att titta på det givna och det sökta och hitta vägar däremellan. Rita, titta efter, pröva.

Är det något som ska överföras till dagens diskussion är det just hur sådana kvaliteter ska odlas i ett mer tidsenligt stoff. I en uppsats om matematisk målsättning (Utgjutelse 22) efterlyser jag mera "hur" och "varför", inte bara "vad". Det har ju blivit allt vanligare att målanalyser på alla nivåer består av uppräknade "moment" av vilka flertalet överhuvudtaget inte alls är mål, utan medel. Vad som saknas är därför även en analys av delarnas roll i helheten. (Kontaktprojekt: "Slutsatser"). Vore matematiker mer offensiva på den punkten kanske vi kunde avvärja en del av de stympningar som gjort att en del kurser knappt uppnår ett enda användbart mål, vem som nu tjänar på det.

För gymnasieskolans del saknar jag alltså en diskussion av vilket stoff som bäst förbereder högre studier – det ska både underlätta fortsättningen och kunna sammanfattas i tillfredsställande mål.

För högskolans del handlar det om hur stoffet ska se ut för att motsvara utbildningens behov med insikten att flertalet inte kommer att använda matematiken, som sådan, i yrkeslivet. Och i båda fallen är en viktig komponent den teoretiska kunskap som bäst bistår kritisk användning av elektroniska hjälpmedel och kritisk förståelse av de resultat dessa producerar. Ännu under min yrkesaktiva tid klarade grafritande räknedosor inte att rita självskärande kurvor.

Jag anser att åskådning och intuition är väsentligt för den begreppsförståelsen och att handräkning och handritning därför försvarar sin roll, inte för färdigheten, utan för förtrogenheten. (Utgjutelse 9, 13)

Beträffande ex.vis geometrin tror jag verkligen inte den klassiska planimetrin ska drivas så pedantiskt som på min tid men jag förfäras över tendensen, även på högskolenivå, att göra räkning av allting. Jacob Bronowski visade en gång i TV-serien "The Ascent of Man" (finns på YouTube!) hur Pythagoras lättast kan förstås genom att man delar upp kvadraten på hypotenusan i fyra exemplar av den rätvinkliga triangeln samt en kvadrat, och därpå flyttar två av delarna.

Givetvis har okänsliga läroboksförfattare lyckats förfuska idén genom att *räkna* på areorna!

På högskolenivå finns amerikanska läroböcker i lineär algebra där vektorer är taltripler från allra första början. Skalärprodukten är då en summa av produkter, vars geometriska tolkning sedan visas m h a cosinusteoremet! Idén är förstås att fort nå fram till räknandet förbi all skymmande insikt. Det är bekvämt och en del mekanikundervisare jag känner är skitförbannade.

I samma anda har man försvårat förståelsen av egenvärden och egenvektorer genom att knyta dessa till en matris, inte en avbildning – man kommer återigen fortare till räknandet. Och studenterna ska strängt taget smälta idén att en egenvektor är en GL-bana av kolonner $T^{-1}X$ hörande till en GL-bana av kvadratiska matriser $T^{-1}AT$!

För att anknyta detta till IT-temat skaffade jag en gång en bok med Matlab-övningar. I den föreslogs bl a som övning att knappa in en 4×4–matris och dess kvadrat, samt låta Matlab räkna ut egenvärdena. Ur dessa hemliga beräkningar med överkursalgoritmer skulle studenterna göra den slående iakttagelsen att egenvärdena kvadreras! Detta skulle alltså vara mer illustrativt än att två gånger derivera en exponentialfunktion, spegla en punkt i ett plan eller sträcka en figur i given riktning!

Jag är därmed redan inne på högskolan och tar därför itu med Peter Nordbergs brev och den följande intervjun. Äktheten kan inte betvivlas. Resultaten han nämner talar för sig själva. Men samtidigt är det rätt mycket som inte går ihop; vi påminns återigen om att minnet är selektivt och ofta gör ideologiskt betingade ingrepp i fakta. Och att utsagor om egen inlärning *måste tolkas*.

Begåvningstypen känner jag igen. Jag har haft studenter som kan titta på en krets och se åt vilket håll alla strömmar går utan att räkna – men som också har nästintill oöverstigliga svårigheter att genomföra en partialintegration. Dock kan jag med lång erfarenhet från teknisk högskola intyga att den inte är representativ. Det behöver påpekas endast därför att många administratörer och "pedagogiska reformatorer" tror det.

I Linköping lyckades man under min tid på IT-linjen ställa till med stor oreda genom byråkratiska ansatser till "integration", t ex den s k **spiralmodellen**, i vars mest outrerade form matematiken skulle läggas efter hela tillämpningen och studenterna därmed bli motiverade för den matematik de tydligen klarat sig utan. Varför det hette "spiralmodell" förstod jag aldrig, men snurrigt var det ju.

På en termin jag var inblandad i skulle beräkning av dubbelintegraler med itererad integration integreras med en samtidig tillämpning, i nästa "tema" skulle variabelbyte integreras med en annan. Man bortsåg alltså från att grundkurser ofta består till stor del av uppbyggnad, endast till en liten del av mål, och att man i tillämpningar av matematik ofta behöver istortsett allt på en gång, och många gånger. Om man plötsligt "förstår" matematiken när man ser den tillämpas måste man ha alltså ha absorberat rätt mycket tidigare. Eller menar man något annat.

(Kontaktprojekt: "Just-in-time")

Redan tidigt i min karriär, i slutet av 70-talet, ville man en gång på Y-linjen (en hybrid av E och F) lägga kursen i Vektoranalys parallellt med elektromagnetismen, för att stärka "motivationen" för den då populäraste matematikkursen i grundutbildningen. En förfrågan hos fysikkollegerna visade att denna "integration" onekligen vore möjlig, bara man strök Maxwells ekvationer. Jag behövde inte göra mer utan överlät åt fysikerna att stoppa "reformen".

Vektoranalys är nu ett av mina skötebarn; jag ska ta åtskilliga exempel från detta ämne och sedan vidga resonemanget. Det var den första större kurs, av ett tiotal, jag föreläste i Linköping, och den jag hade mest – 17 tillfällen blev det tillsist.

Jag blir något förundrad när jag läser att det var först i elläran som Nordberg förstod vad divergens och rotation var. Det är nämligen den mest abstrakta tillämpningen; operatorernas roll beror inte på några konkreta tolkningar utan istortsett enbart på att ellärans modeller bygger på omvända kvadratlagar (vilket borde betonas). Vektoranalysen på KTH har så länge jag vetat undervisats av fysiker, från en förvisso kompakt lärobok fullproppad med tillämpningar från olika områden (det är mångfalden av tillämpningar som motiverar ämnet) och en lysande genomgång av de vanligaste vektorfälten, deras tillämpningar och egenskaper.

Själv brukade jag alltid härleda kontinuitetslagen för strömningar på både lokal och materiell form, vilket är ett sätt att tala om vad divergensen **är**, och inte bara vad den **blir**. Jag gjorde då ofta en slående iakttagelse; många studsade inför begreppet materiederivata. Att de skulle studsa inför den matematiska behandlingen kunde jag förstå, när de för ovanlighetens skull såg en vettig användning av kedjeregeln. Men det var själva **begreppet**, den fysikaliska intuitionen, som gäckade dem. T ex acceleration skulle alltså sakna intuitiv innebörd?

I Vektoranalysen är det också en formeldiger apparat för de olika operatorerna i sfäriska och cylindriska koordinater. Däri ingår ett antal skalfaktorer, t ex i uttrycket för divergensen ingår en volymskala och tre areaskalor (jag har sett ett kompendium som genom ad hoc-behandling räknar bort denna struktur!). Jag brukade påpeka att man svårligen kunde glömma dessa skalfaktorer (där t ex längdskalorna är radier i cirklar) eftersom t ex gradienten av en skalär storhet skulle få olika fysikalisk dimension i olika komponenter. Denna hänvisning till fysikaliskt tänkande gick många förbi, vilket syntes på tentor. Dimensionsanalys hade då tränats i en inledande laborativ fysikkurs.

Min analys av dessa, och många liknande, fenomen, är att studenter tidigt (omedvetet) så vant sig att se matematik som ett "självändamål", ett "kodspråk för invigda", en "initieringsrit", etc., så att tillämpningsanknytningen bara ses som bara ett sätt att krångla till kunskapen. (jfr gärna diskussionen på https://www.flashback.org/t688282). Med tanke på vad jag tidigare nämnt om amputationen av åskådning och intuition i gymnasielitteraturen borde det inte förvåna, och det är alltså något som högskolans undervisare måste vara vaksamma på.

Det innebär bland annat att inte mycket är vunnet på att dränka studenterna i tillämpningar. Min erfarenhet är rik på den punkten. När jag föreläste flervariabelanalys brukade jag ofta använda en halv föreläsning till att gå igenom kinematiska singulariteter för en plan robotarm, som exempel på linearisering. Det var alltid uppskattat, eftersom diskussionen krävde få förberedelser, och räkneresultaten motsvarade intuitionen.

Ett exempel i den andra riktningen är min sista föreläsning i lineär algebra för Y-linjen. När jag tidigare föreläste differentialsystem brukade jag ställa upp en enkel diskretiserad modell för värmeledning i en stav (tre segment, isolerade ändpunkter). Det var tacksamt, ty t ex fick egenvärdenas tecken (noll eller negativa) en naturlig tolkning: jämvikt och exponentiellt avklingande. Och matrisen blev symmetrisk p g a konservation. Sista gången fick jag infallet att i samma veva ta upp ett svängningsproblem med exakt samma matris, denna gång symmetrisk p g a Newtons tredje lag, actio–reactio. Det var för mycket. Jag övertrodde studenternas känsla för de Fysikaliska Principer som undervisats i en inledande kurs med detta namn.

För att återvända till exemplet Vektoranalys så noterade jag också under dessa 17 år många förvirrande, och direkt felaktiga, diskussioner kring konkretiseringar och tillämpningar. Ett genomgående fenomen, men extra tydligt i detta ämne - vilket givetvis minskar trovärdigheten.

I många böcker "härleds" t ex Arkimedes' princip med hjälp av en integralsats. Man postulerar då en modell där vätsketrycket ökar lineärt med djupet, var kommer det ifrån? Det kan i själva verket härledas från naturliga antaganden om homogenitet, jämvikt och isotropi, vilket vore värdefullare. Arkimedes' princip är en *omedelbar* följd av dessa antaganden!

Än värre hittar jag i en amerikansk lärobok en uppmaning att inte ta begreppet divergens alltför bokstavligt, ty t ex för punktkällan, med divergens noll, går ju fältlinjerna isär, de "divergerar". Författarna glömmer alltså att hastigheter har inte bara riktning utan även belopp och slarvar därmed bort det mest illustrativa exemplet av alla! På omslaget till ett kompendium finns en figur på ett fält med slutna fältlinjer vilket påstås illustrera $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$. Att detta är fel visas av standardexempel från elektromagnetismen (dock kan ett sådant fält inte ha global potential). Den bästa illustrationen av nollskild rotation är förmodligen $x\mathbf{e}_y$, som har *räta fältlinjer* – återigen: hastigheter har faktiskt både riktning och belopp.

När man tröttnar på läroböckernas "förklaringar" får man försöka tänka lite själv, eller prata med tillämpare. En söndagsförmiddags tankeverksamhet ledde mig en gång till att polärfaktorisera lineariseringen av en transportavbildning, och differentiera vid tiden noll. Sen kunde det mesta förklaras. När jag senare diskuterade saken med en doktorand i Hållfasthetslära fick jag veta att allt detta står i grundläggande läroböcker i Kontinuumsmekanik ...

Det slog mig då, liksom många gånger senare, att t ex lineära algebran inte förs tillräckligt långt (Tankar om lineär algebra) och att flervariabelanalysen är alldeles felbalanserad. I det första fallet kan det bero på tidsbrist; men det kan också bero på att många moment på vägen blir till farthinder genom att överarbetas, dvs. förvandlas till mål iställetför medel. "För vilka a och b är dessa fyra vektorer lineärt beroende?" Usch!

I det andra fallet skulle jag säga att det handlar om överbetoning av andra moment för vilka det råkar vara lätt att i det oändliga variera vissa uppgiftstyper. Till mina favoritantipatier hörde redan under studietiden transformationer av andra ordningens differentialuttryck eller integralberäkningar där en enda substitution råkade passa precis till både integrand och område.

Skälet att så mycket av högskolematematiken idag ser ut som självändamål är alltså inte inkrökt esteticism utan bristande tålamod med den långsiktighet som kännetecknar all meningsfull inlärning. Vissa fånigheter är lättare att lära ut än den matematik som verkligen biträder modellbygge samt förenar till synes disparata specialiteter och därmed också – i längden – bidrar till tankeekonomi. Vissa studenters motstånd mot alltför ivrig verklighetsanknytning måste, som jag påvisat, hanteras med finess, men inte med kapitulation. (Mycket borde också anförtros åt litteraturen).

Hur exakt detta görs vill jag inte detaljera, ty jag pensionerade mig för 4 år sedan och då ska man inte lägga sig i andras framtid. Jag delar däremot med mig av min erfarenhet som är att alla diskussioner om ämnets relevans och aktiva kontakter med tillämpare väcker respekt och bidrar till att stärka ämnets ställning, bland både avnämare och studenter.

(f. 1944, verksam vid LiTH 1970-2006.)

Referenser:

Utgjutelse 1-25, speciellt 9, 13, 22: `http://www.mai.liu.se/~pehac/`
Kontaktprojekt (speciellt "Slutsatser"): `http://www.mai.liu.se/~pehac/contact/table.html`
Programförklaring: `http://www.mai.liu.se/~pehac/contact/proj.html`
Kontaktrapportens uppbyggnad: `http://www.mai.liu.se/~pehac/contact/build.html`
Tankar om lineär algebra: `http://www.mai.liu.se/~pehac/la.html`

Mina böcker om lineär algebra, Krypa–Gå, och Kossan, finns gratis på samma site. Flertalet av de tillämpningar jag diskuterat (även vektoranalys!) beskrivs i dem.

Stockholms högskola, Mittag-Leffler og Institut Mittag-Leffler

Arild Stubhaug

De første forelesningene ved Stockholms högskola fant sted i 1878. Fagene det ble forelest i var botanikk, fysikk og mekanikk, og det skjedde med innleide lærerkrefter fra Naturhistoriska Riksmuseet, Meteorologiska Central-anstalten og KTH (som i 1877 hadde endret navn fra Teknologiska Institutet i Stockholm til Kungliga Tekniska Högskolan, KTH). Fagkretsen ble utvidet med matematikk, geologi, zoologi og kjemi da de første professorene ved Högskolan ble utnevnt. Det skjedde i 1881, og den første blant disse var Gösta Mittag-Leffler.

Högskolan var kommet i stand etter mangeårig arbeid av en Högskoleförening, en venne- og støtteforening med om lag 100 medlemmer som var sterkt støttet av Stockholm kommune. Styret bestod av syv personer, der to var valgt fra Stockholms bystyre, to fra Vetenskapsakademien, en fra Svenska Akademien, samt skolens rektor og en person valgt av de seks andre. Ved oppstarten hadde ikke skolen noen rektor, og de første årene var det Högskoleföreningen som valgte Svenska Akademiens representant. I realiteten var det de to representantene for Stockholm by som hadde kontroll om virksomheten. Og det var styreleder Gustaf af Ugglas og sekretær Albert Lindhagen. For styret, lærerne og støtteforeningen stod det klart at Högskolan skulle være et liberalt og moderne alternativ til universitetene og den akademiske humaniora-dannelsen. Moderniteten og det fremadskridende stod i den nærmeste forbindelse med naturvitenskapene. Derfor begynte også skolen med undervisning kun i naturvitenskapelige fag. Skolen var et svar på den industrielle og naturvitenskapelige utvikling, og skulle ved siden av undervisning, også drive forskning på høyt nivå. Men hvordan balansere mellom forskning og samfunnsnyttig utdannelse?

Sammenlignet med de etablerte universitetene i Lund og Uppsala hadde professorene ved Högskolan minimalt med pliktarbeid. De hadde to timer forelesninger per uke, to og en halv måned sommerferie, vinterferie halvannen måned fra midt i desember, ingen eksaminasjon og høy årslønn (7000 kroner). Stockholms högskola fremstod som en dynamisk og moderne institusjon, og med entusiasme og pågangsmot var lærerne ved skolen med på å skape noe nytt.

I sitt 30 år lange virke som matematikkprofessor skulle Mittag-Leffler i høy grad prege virksomheten, i to perioder fungerte han også som skolens rektor. Men fra første stund kom han på kant med ledende krefter i styret. Mittag-Leffler ville skape et akademi, en institusjon etter mønster av de mest berømte utenlandske: Collège de France i Paris og The Royal Institution i London. I alle sine år ved Högskolan holdt han fast på disse høye målsettingene. Han kjempet for sine synspunkter, men led nederlag. Det var flere årsaker til dette, men først og fremst at mektige Lindhagen hadde helt andre planer for skolen enn de ideal Mittag-Leffler slo til lyd for.

Albert Lindhagen var en markant skikkelse i byens styre og stell. Han hadde hatt ledende stillinger i departement og Riksdag og i en årrekke vært sentral i Stockholms kommunale og kulturelle liv. Det var Albert Lindhagen som i 1860-årene hadde utarbeidet den storslåtte byplanen for Stockholm med avenyer og alléer, torg og parker, sjøutfyllinger og fjellsprengninger. Det var en plan som i 1880-årene mer og mer ble realisert i takt med byens økende folketall. I Lindhagens storstilte perspektiver inngikk også Stockholms högskola som en naturlig og nødvendig institusjon. Å kjempe mot Lindhagens vilje var en kamp Mittag-Leffler aldri kunne vinne.

Lindhagen og hans krets ville at skolen skulle utvikles i retning av et nytt statlig universitet, riktignok med en annen faglig profil enn universitetene i Uppsala og Lund, men med rett til å avholde eksamener og utstede akademiske grader, og slik utdanne embetsmenn som straks kunne tre inn i statlig tjeneste. Slik Högskolan fra først av fungerte måtte studentene etter studier i Stockholm avlegge sine eksamener og ta sine akademiske grader i Lund eller Uppsala. Men tilgangen på studenter som ville og kunne studere under slike betingelser, var ikke stor nok. Og praktiske nyttehensyn og økonomiske realiteter førte etter hvert til at flere og flere innså det urealistiske i å holde fast på de høye idealene som Mittag-Leffler stod for.

Ved siden av økonomisk støtte fra Stockholm kommune var skolen også i stor grad avhengig av private fond og bidrag, noe som fort viste seg å bli vanskelig å skaffe til veie dersom skolen ikke prioriterte den utdannelse og de kvalifikasjoner samfunnet så seg tjent med.

Ingen kunne søke en stilling ved Högskolan, styret kalte professorene. Og slik forble praksis de fire første årene. Under styret var det et lærerråd, som utnevnte rektor, samt hadde avgjørende innflytelse ved utnevnelsen av nye professorer. Dette lærerrådet ble derfor en viktig arena for Mittag-Leffler, som på alle måter arbeidet for sine høye ideal.

I tillegg til forelesningene holdt han et ukentlig matematisk seminar hjemme hos seg. Blant hans aller første studenter var Ivar Bendixson, som etter et par års studier i Uppsala kom til Högskolan. Høsten 1883 kom Edvard Phragmén til Högskolan, og han ble straks trukket inn i arbeidet med Acta Mathematica, tidsskriftet Mittag-Leffler året før hadde startet og stod som utgiver og redaktør for. At dette tidsskriftet, med en nordisk redaksjon og under kongelig beskyttelse, helt fra begynnelsen ble en vitenskapelig suksess der verdens ledende matematikere publiserte sine arbeider, styrket Mittag-Lefflers stilling. Det nære samarbeidet med russiske Sonja Kovalevsky begynte også denne høsten 1883. På hans initiativ kom hun til Stockholm, først for å holde forelesninger på hans private seminar. Sammen med Karl Weierstrass hadde Mittag-Leffler planlagt at Sonja Kovalevsky på denne måten skulle finne ut om hun egnet seg for undervisningsvirksomhet, og at et eventuelt engasjement ved Högskolan inntil videre skulle holdes hemmelig.

Mittag-Leffler trodde og håpet på et "briljant matematiskt lif" i Stockholm, og han lyktes. Han fikk Sonja Kovalevsky ansatt, først midlertidig og siden i et ordinært professorat. Han nedkjempet både russerhat, redsel for sosialisme og kvinnefiendtlighet. Mange mente imidlertid at han i sin iver for Sonja hadde satt andre til side, og selv trodde han at flertallet av Högskolans lærere ville ha gitt ham "arsenik, om det ej vore förbjudet i strafflagen". I arbeidet for å skaffe midler til Sonja Kovalevsky stilling hadde Mittag-Leffler kontakt med en rekke pengesterke personer og flere forsikringsselskaper. Han opparbeidet et fond, og gikk videre med planer som kunne gjøre det mulig å få verdens ledende matematikere knyttet til Högskolan gjennom gjesteforelesninger, og han planla en stor matematikk-konkurranse. Alt for å styrke Sverige som en "matematikkens stormakt", som han selv uttrykte det, og gjøre Högskolan til et ledende senter for matematisk forskning. Oscar II ble med på planene. Kongen ville gjerne støtte og gi sitt navn til en internasjonal pris som hvert fjerde år skulle gå til den som hadde gjort den største oppdagelsen innen den matematiske vitenskapen. (Det resulterte i den store Kong Oscars pris i 1889.)

Blant de mange Mittag-Leffler tok kontakt med for å realisere sine prosjekter var finansmannen Robert Dickson, industrimannen Thorsten Nordenfelt i London, John Ericsson i New York. Mittag-Leffler fikk ord på seg for å være en svært dyktig pengeinnsamler, og han kontaktet senere også Alfred Nobel i Paris. Denne iveren skulle imidlertid bli brukt mot ham. I sitt første utkast til testamente hadde nemlig Nobel tilgodesett Högskolan med fem (5) prosent av verdiene i sitt dødsbo. Men da Nobel døde og hans endelige testamente ble kjent, var det ingenting til Högskolan - og det ble heller ikke noen Nobelpris i matematikk. Ryktene begynte å spre seg om at det skulle være et fiendskap og en rivalisering mellom de to, og at Mittag-Leffler derfor var årsak til Nobels manglende velvilje overfor Högskolan.

"Kulturhistoria" ble innført ved skolen da forfatteren Viktor Rydberg høsten 1884 ble ansatt som ekstraordinær professor i kulturhistorie. Med Rydberg skaffet Högskolan seg også en humanistisk profil. Mange i styret så dette som et første steg mot et fullstendig filosofisk fakultet, og flere ønsket i tillegg et juridisk fakultet. Mittag-Leffler aksepterte Rydbergs stilling, og fikk senere også Rydberg til å bosette seg i Djursholm, men en videre fagtilbud var han imot. Ifølge Mittag-Leffler burde skolen utelukkende satse på realfagene matematikk, mekanikk, fysikk, astronomi, kjemi, geologi, botanikk og zoologi. På den måten ville skolen bli viktig for Sverige og Nordens fremtid.

Med knapp margin ble Mittag-Leffler valgt til rektor, første gang i 1886, men kun for et år. Som rektor fremmet han de kontroversielle standpunktene han hele tiden hadde gjort seg til talsmann for. Stockholms högskola skulle etter hans mening ha karakter av et fritt akademi uten ansvar for grunnutdannelse, og uten plikt til å arrangere eksamener og utdele akademiske grader. Han fikk deler av lærerkollegiet med seg på å stå hardt på skolens §7, der det het at "närmaste vården om högskolan tillkommer lärarna". Da året som rektor var omme, mente han selv å ha gjort mye for å forbedre skolens anseelse. Det hadde imidlertid vært "en stor uppoffring" å påta seg arbeidet som rektor, men "den som en gång tagit f-n i båten får ock söka föra honom i land." Det gjaldt Högskolans være eller ikke-være, fremholdt han.

Mittag-Leffler stilte likevel som rektorkandidat til neste to-årsperiode. Men blant skolens lærere var det nå nærmest en kampanje for å få ham fjernet. Han ble anklaget for å ha vært drevet av usselt hat og selviske motiver, og han ble ikke gjenvalgt. Mer og mer kjente han at han stod alene, og han sonderte mulighetene for å kunne forlate Högskolan. I et konfidensielt brev til den svensk-norske generalkonsulen i London, Carl Juhlin-Dannfelt, som hadde de beste kontakter i Amerika, listet han opp alle vanskelighetene han hadde ved Stockholms högskola. Det var umulig å holde de matematiske studiene på samme høye nivå som tidligere, og derfor kunne han tenke seg å forlate sin virksomhet i Stockholm. Kanskje kunne han ha henvendt seg til et europeisk land for å få en stilling, men hans sympatier talte enda mer for Amerika, skrev han. Amerika hadde store fremtidsutsikter, der var mye upløyd mark for den vitenskapelige matematikken. Han hadde hørt at guvernør Leland Stanford hadde gitt tre millioner pund til et nytt universitet i California med den målsetting "att beröfva Europa deras förnämsta vetenskapsmän". Mittag-Leffler ville at konsulen skulle gi amerikanerne beskjed om at han "med fullt allvar skulle reflektera öfver ett anbud att öfverflytta till det nya universitetet" i California. Og han tilføyde at han naturligvis da ville ta utgivelsen av Acta Mathematica med seg. Tanken om å reise bort holdt seg i flere år. Men etter alt å dømme nådde ikke meldingene frem til rette vedkommende, i alle fall kom det ikke noe svar, og det finnes heller det ingen dokumenter om dette i Stanford-universitetets arkiver.

På Högskolan minket trivselen. Og den sank enda et hakk da professor Gustav Retzius (i 1887) ble valgt til Lindhagens etterfølger. Retzius fikk straks, med svigermorens penger, opprettet et fond på 100 000 kroner til et professorat i nasjonaløkonomi. Retzius og frue donerte også en stor tomt til Högskolan, og planer om å opprette et juridisk fakultet ble fremført med styrke. I 1890 blir stilte Mittag-Lefller igjen som rektorkandidat, og ble valgt med knapt flertall. I nye diskusjonsrunder om Högskolans eksamensrett gjentok Mittag-Leffler sine synspunkter om at skolen burde sette sin ære i å tilby en rent vitenskapelig undervisning til dem som studerte for emnets egen skyld. Alternativet var å dra til seg det store publikum, det ville si studenter som ikke hadde annet mål enn eksamen. Et poeng var det også at å arrangere eksamener ville medføre mer arbeid og dermed nødvendigvis kreve høyere gasjer dersom skolen fortsatt skulle kunne knytte til seg lærere med samme høye kompetansenivå.

I denne sin to-årige rektorperiode opplevde Mittag-Leffler og skolen det gledelige at høgskolevennen grosserer Johan Söderberg etterlot en gave til Högskolan på rundt to millioner kroner. I de offisielle redegjørelsene fra Högskolan het det seg at gjennom denne donasjonen var den matematikk-natuvitenskapelige avdelingens virksomhet trygget for all fremtid. Fra bystyret og Högskoleforeningen ble det imidlertid uttrykt håp om at skolen nå endelig kunne få ryddet av veien det som hindret en utvikling mot et statsuniversitet på linje med universitetene i Uppsala og Lund. Fremfor alt gjaldt det å skaffe Högskolan eksamensrett, om nødvendig ved endring av skolens statutter. Et nytt argument for en slik utvikling var en kongelig forordning om universitetseksamener, samt at Göteborgs nye høyskole arbeidet for statlig tilknytning og eksamensrett.

Alt dette gikk på tvers av den linje Mittag-Leffler stod for. Som rektor måtte han gå med på at styret nedsatte en komité for å utarbeide et forslag til revisjon av statuttene, og at planene om et juridisk fakultet kom på bordet med fornyet styrke. Et slikt rettsvitenskapelig fakultet måtte opplagt fra første stund ha eksamensrett, og diskusjonene svekket Mittag-Lefflers linje. Hans sterkeste motargument var å vise til statuttenes ordlyd der det het at "vården for högskolan" først og fremst skulle tilkomme lærerne.

Innstillingen om eksamensrett ble lagt frem, det samme ble vurderingen om et rettsvitenskapelig fakultet. På Högskolan tilspisset motsetningene seg, og ved rektorvalget høsten 1892 ble ikke Mittag-Leffler gjenvalgt. For annen gang mislyktes han i å forlenge sin rektorperiode.

Utviklingen gikk ubønnhørlig i en annen retning enn den Mittag-Leffler stod for. Högskoleföreningen og representanter for Stockholm by vant etter hvert økende støtte også blant skolens lærere. Standhaftig ledet Mittag-Leffler en stadig svakere fløy av lærere som ville gjøre skolen til et radikalt alternativ, til "ett verkligt centrum för den högre kulturen", og "en härd för den verkliga forskningen", som Mittag-Leffler uttrykte det i en tale for skolens styre våren 1894. Her kom han likevel med kompromissforslag. Han kunne til nød strekke seg til at det ble innført en licentiatexamen - men absolutt ingen kandidateksamen. Å innføre noe slikt ville i realiteten bety å innføre en helt ny undervisningsform ved skolen, hevdet han. Kompromissforslag vant i første omgang en viss støtte i lærerrådet. Men skolens styre arbeidet for eksamensrett på alle nivåer og i alle fag. En sterk motspiller fikk Mittag-Leffler nå også i Svante Arrhenius, som ble skolens rektor i 1897. Han støttet planene om eksamensrett og arbeidet for opprettelsen av et retts- og statsvitenskapelig fakultet.

Det skulle imidlertid gå enda mange år før siste ord var sagt i saken. Først 11. mars 1904 falt Kungl. Maj:ts avgjørelse: Högskolan fikk rett - riktignok først bare for en prøveperiode på fem år - til å avholde kandidat- og licentiateksamener i de emnene der det fantes ordinære professorater, samt promovere doktorer i de samme emnene.

Da Stockholms högskola i oktober 1904 høytidelig feiret 25-årsjubileum i Vetenskapsakademiens auditorium med kongen til stede, var Mittag-Leffler blant de mange talerne. Han fremhevet hvordan matematikkens stilling i Sverige ved etableringen av Stockholms högskola var kommet opp på et europeisk toppnivå - og han gjennomgikk historien fra Swedenborg og Klingenstierna til hans egne fremstående elever: Bendixson, Phragmén, Mellin, Fredholm, von Koch, Cassel, Lindelöf m.fl. Og han pekte på hvordan dette var nådd gjennom den undervisningen som var praktisert. De gode resultatene var nådd på et rent vitenskapelig program, og helt uten å arrangere eksamener. Han håpet at eksamensvesenet nå ikke måtte begrense skolens frie, vitenskapelige virksomhet, at skolen alltid måtte ha de store målene i sikte og alltid vite å arbeide utover det bestående mot noe bedre.

Ved høstterminens slutt i desember 1904 eksaminerte Mittag-Leffler for første gang. Han mente kandidaten var "rätt skral", men ga ham likevel cum laude , og i sitt videre virke synes han å ha vært en mild eksaminator og sensor.

Da Mittag-Leffler i 1906 fylte 60 år meldte han gjennom avisintervjuer og reportasjer at Stockholms högskola med tiden kunne vente seg en storslagen donasjon. Jubilanten hadde allerede gitt 5000 kroner til skolen med det ønske at det skulle stiftes en pris for fremragende matematiske arbeider utført av skolens elever. Prisen, Mittag-Lefflers pris, skulle være på 500 kroner og gis så ofte et slikt verdifullt arbeid forelå, og så lenge det fantes midler. (Ved Stockholms universitet blir fremdeles fremragende doktoravhandlinger tildelt Mittag-Lefflers pris.) Mittag-Leffler hadde konkrete planer om å overføre store deler av formuen sin til Högskolan. (Fomuen som på det meste trolig var på rundt syv-åtte millioner kroner, hadde han bygget opp ved kjøp og salg av eiendommer og aksjer, investeringer i diverse utbyggingsprosjekter og industrianlegg m.m. både innenlands og utenlands.) Til avisene uttalte jubilanten at hans boksamling som kunne sies å være det største matematiske spesialbiblioteket som fantes for tiden, etter hans død også skulle gå til Stockholms högskola.

I de neste årene syntes han imidlertid at de faglige standardene på Högskolan falt mer og mer. Han fant seg mindre og mindre til rette. Studenttallet gikk riktignok opp, han hadde flere tilhørere på sine forelesninger enn tidligere, men ingen matematiske begavelser som i glansdagene. Han så med sorg på hvordan hans tidligere elev og protegé professor Ivar Bendixson var blitt grepet av en byråkratisk tankegang og i sitt arbeid ved skolen satte embetsansvar fremfor vitenskapelighet. I desember 1909 var det igjen stor fest i Högskolans regi. Det var innvielsen av skolens nye bygg på Drottninggatan 118. Mittag-Leffler var dekanus for det matematisk-naturvitenskapelige fakultet, og uttrykte glede over at skolen nå endelig fikk "eget hjem". Han hadde tatt initiativ til utnevelse av æresdoktorer, og etter interne diskusjoner og kongens godkjennelse ble åtte personer kreert til æresdoktorer. At tre av disse var matematikerne (Poincaré, Painlevé og Volterra) irriterte noen, men Mittag-Leffler argumenterte med at det blant fremstående utlendinger som hadde stått i et nært forhold til Stockholms högskola, først og fremst var matematikere. En markering av det nye universitetshuset var også at skolen for første gang kreerte doktorer, og de tre doktorandene var alle innen det matematisk-naturvitenskapelige fakultetet. (Skolen hadde nå ellers et humanistisk, et juridisk og et stats- og sosialvitenskapelig fakultet.)

Mittag-Leffler kunne ha blitt stående lenger i professorstillingen, men valgte å gå av i 1911, dels på grunn av helsen og dels for ikke å stå i veien for yngre krefter, som han sa. På den annen side ville han nødig nedlegge all sin lærergjerning, han ønsket å tjene Stockholms högskola så langt kreftene rakk. Men vanskelighetene tårnet seg raskt opp, og motsetningene stakk dypt, først og fremst i forholdet til Ivar Bendixson, som nå (1911) var blitt skolens rektor, og faktisk ble sittende i rektorstolen så lenge Mittag-Leffler levde. Rivningene mellom dem hadde pågått lenge. Mittag-Leffler hadde mange ganger angret på at han i sin tid så ivrig hadde arbeidet for å få Bendixson frem. På nyåret 1911 noterte Mittag-Leffler i dagboken: "Det blir nog bäst jag behandlar Högskolefrågan som ett afslutadt kapitel ur mitt lif." I praksis var det imidlertid vanskelig for ham å la være å tenke på det han hadde vært med på å bygge opp gjennom 30 år. Högskolan hadde, ifølge Mittag-Leffler, mistet all virkelig betydning, og han fryktet at den skulle bli "en ny examensfabrik". Skolens program var ikke lenger å "meddela vetenskaplig undervisning", men å gjennomgå pensum og avholde eksamen. Derfor var det angivelig heller ikke lenger så nøye hvilke lærerkrefter skolen rådet over. "Vi må akta oss att ställa målet för högt" - det var mottoet som preget skolens holdning, og som eksponent for dette mente Mittag-Leffler å se rektor Bendixson. Ifølge Bendixson hadde vitenskapen angivelig nådd et punkt der den stod stille, og den fremste oppgaven i undervisningen var å viderebringe hva som var oppnådd. Det fantes ikke lenger matematiske problemer som man med forhåpning om noen løsning kunne presentere for studentene. Men det var Bendixson som stod stille, ikke vitenskapen, fremholdt Mittag-Leffler, som når som helst sa seg villig til å vise Bendixson en rekke oppgaver som han visste kunne løses, samt omtrent hvordan - oppgaver som derfor var vel egnet "att enthusiasmera en begåfvad ungdom". I tillegg til det faglige kom også en sterk politisk uenighet mellom Bendixson og Mittag-Leffler. Bendixsons sympati lå hos de liberale, hans nære venn siden barndommen var politikeren (og to ganger statsminister) Karl Staaff.

I sin avskjedsøknad hadde Mittag-Leffler bedt om at han resten av sitt liv - uten tjenesteforpliktelser og uten rett til å delta i lærerrådet - måtte få bli stående som lærer med rett til å forelese. Han ville gjerne fortsette å ha studenter, og han planla mindre seminarer i sin villa i Djursholm. I den trykte oversikten for Stockholms högskolas forelesninger fikk Mittag-Leffler inn at han høstterminen 1912 ville forelese to timer per uke i "Elementer af Funktionsteorien, fortsättning af föregående termins förelesningar". I oversikten for høstterminen 1913 ville Mittag-Leffler ha inn at det i hans bibliotek i Djursholm ville bli holdt forelesninger over utvalgte kapitler i funksjonsteorien, og at tilhørerne samtidig ville få adgang til biblioteket. Han lyktes i alle fall det første året, da foreleste Phragmén om Fourier-rekker. Men i Högskolans "berättelser" finnes ingen opptegnelser om dissse forelesningene. Der står det nå bare år etter år: "Professor Mittag-Lefflers rikt försedda bibliotek har såsom förut i vidsträckt mån stått lärare och elever till förfogande."

At noe varig skulle bli stående etter ham, var en tanke Mittag-Leffler lenge hadde hatt. Sitt første testamente skrev han under en dramatisk sykdomsperiode i 1887. Den gangen var han mest opptatt av at Acta Mathematica skulle overleve og matematikkundervisningen ved Högskolan sikres. Ved sin 60-årsdag i 1906, og da han gikk av som professor i 1911 var planen åpenbart å knytte fremtidige donasjoner til matematisk forskning ved Stockholms högskola. Men utviklingen ved skolen og forholdet til rektor Bendixson gjorde at han kom på andre tanker. Da han til sin 70-årsdag satte opp sitt testamente, var bestemmelsen tatt, og han hadde fått sin ektefelle med på planene. Biblioteket, villaen og formuen skulle under navnet "Makarna Mittag-Lefflers Matematiska Stiftelse" overtas av Kungliga Vetenskapsakademien, som i villaen skulle drive et matematisk forskningsinstitutt med det formål å fremme svensk og nordisk matematikk - "den rena matematiken i dessa länder" - samt gjøre den kjent i verden.

Det han ikke hadde fått til med Stockholms högskola, det var det han ville prøve å få til med sitt institutt. At han hadde lyktes så dårlig ved Stockholms högskola, hørte til hans "lifs största missräkningar och sorger", og han hadde i planleggingen av instituttet prøvd å rydde unna "de störestenar" som først og fremst fikk hans planer for Högskolan til å ramle.

I de neste årene fikk han likevel vanskeligheter med å sikre et godt faglig og økonomisk fundament for instituttet. Dels skyldtes det de økonomiske konjunkturene samt private pengetap, og dels var det vanskelig å organisere den vitenskapelige ledelsen på en måte som kunne samle kreftene i det matematiske miljøet. Selv satt Mittag-Leffler så lenge han levde som den selvsagte forstander for instituttet, og han ledet styret, som ellers bestod av Vetenskapsakademiens matematiske klasse. Å opprettholde villaen og biblioteket, utgi Acta Mathematica og skaffe midler til stipend og etter hvert knytte flere vitenskapelige krefter til instituttet, var første prioritet. Han lyktes i å knytte til seg stipendiater (svenske Torsten Carleman, finske Pekka Myrberg, norske Øystein Ore), og danske Niels Erik Nørlund ble en dyktig redaktør for Acta Mathematica. Nørlund ble også utpekt som den kommende bestyrer for instituttet. Mittag-Leffler ville under ingen omstendigheter ansette en professor fra Stockholms högskola eller KTH. Skjedde det, var han redd instituttet i Djursholm skulle "sjunka till något vanligt examensinstitut".

Men de forventede millionbevilgningene fra egen formue uteble, og i et desperat forsøk på å skaffe pengemidler, prøvde Mittag-Leffler å selge sin store samling med gamle matematiske manuskripter, den såkalte Boncompagni-samlingen. Tilbudet på 20 000 gikk til The Mathematical Association of America, men de avslo og fortalte at samlingen med moderne metoder kunne fotokopieres for 5000 . (Boncompagni-samlingen befinner seg i dag i Stockholms universitetsbibliotek.)

Mittag-Leffler ble på sin 75 årsdag og sin 80 årsdag hyllet fra mange kanter. I hyllesten fra Stockholms högskola ble det hver gang gitt uttrykk for en forståelse for hans store innsats. Dette fant han tross alt svært lovende og gledelig, og i et fire sider langt svarbrev uttrykte han håp om at Stockholms högskola kunne bli det han en gang hadde drømt om. Med slike forhåpninger ville han ta "det slutliga, avgörande steget in i det obekanta, det drömda och efterlängtade", idet han minnet om sin lærer og faderlige venn Karl Weierstrass' ord siste gangen de så hverandre: "Människorna dö, men deras tankar förbliva."

Stockholms högskola (grunnlagt i 1878) = Stockholms universitet (navneforandringen skjedde i 1960 da staten overtok skolen).

Gösta Mittag-Leffler (1846-1927).

Institut Mittag-Leffler grunnlagt i 1916 av makarna Signe og Gösta Mittag-Leffler og lokalisert i deres villa i Djursholm. Instituttet ble straks lagt inn under Kungliga Vetenskapsakademien (KVA).

Mittag-Leffler and his Cronies

(The photos of this article published by the kind permission of the Mittag-Leffler Institute)

Institut Mittag-Leffler

En lägesrapport

Anders Björner

Matematikerna i de nordiska länderna har en ovärderlig skatt: ett eget forskningsinstitut helt ägnat åt matematik. Det är beläget i en unik miljö som är exceptionellt inspirerande och väl lämpat för kreativt arbete.

Institut Mittag-Leffler torde vara välbekant för många av Utskickets läsare. Om du inte känner till det så hänvisar jag till vår nätsida www.mittag-leffler.se för information. Den intressanta historiska bakgrunden till Institutets tillblivelse beskrivs i en artikel av Arild Stubhaug i detta nummer.

Jag vill med dessa rader informera om några aktuella angelägenheter vid Institutet.

1. Verksamhet. Institutets nuvarande programverksamhet har pågått i drygt 40 år. Efter att Institutet legat i malpåse under årtionden drev Lennart Carleson i slutet av 1960-talet igång den vetenskapliga verksamheten efter ett koncept som visat sig vara mycket lyckat. Om detta och mycket annat intressant kan man läsa i artikeln
www.ams.org/notices/199909/fea-mittag.pdf av Allyn Jackson.

En gradvis förändring av programmens format och omfattning kan observeras. Den första tiden, från starten 1968 fram till cirka 1990, var programmen alltid årslånga och flera deltagare stannade vid Institutet flera månader, i vissa fall halvår eller helår. Sedan mitten av 1990-talet har Institutet i huvudsak drivit två halvårsprogram.

En stor förändring har också skett vad gäller antalet deltagare. Från att tidigare ha varierat och tidvis varit ganska lågt, ligger antalet deltagare nu ständigt vid eller strax under den övre gränsen som är 29 personer.

Omvärlden har också förändrats vad gäller vår typ av verksamhet. Vid starten 1968 fanns det inte många matematiska forskningsinstitut i världen. Jag tror att det utöver IML bara fanns tre: IAS (Princeton), IHES (Paris), och Oberwolfach. Sedan dess har massor av institut tillkommit. Så gott som samtliga driver forskningsprogram som har likheter med våra program. Dessutom har de flesta kortare workshops och diverse utåtriktade aktiviteter.

Vårt institut befinner sig idag alltså i en konkurrenssituation. Deltagarna i våra program har många gånger deltagit i program vid andra institut och är vana vid workshops och andra kringaktiviteter. I denna konkurrens har dock IML något mycket speciellt att erbjuda, och det är en lugn och kreativ forskningsmiljö. Institut Mittag-Leffler är inte ett konferenscentrum utan en arbetsplats för nyskapande och tidskrävande forskningsarbete i matematik.

Jag känner inte till någon matematiker som, efter att ha vistats vid IML och förstått innebörden av vårt koncept, inte uppskattar vårt sätt att driva program. Deltagarna erbjuds gott om tid och fullständig frihet att följa sina egna forskningsintressen, i vilken riktning de än leder. I huset finns gott om kollegor, från världsledande experter till nybakade postdocs, tillgängliga för informella samtal och ev. samarbete

Vi bör ändå fråga oss om det finns anledning att förändra vårt koncept. Eftersom vad vi erbjuder inte längre är så unikt, åtminstone vid en ytlig jämförelse, kan vi kanske finna bättre sätt att använda den resurs för nordisk matematik som Institutet utgör.

Dessa frågor har diskuterats inom Institutets styrelse. Alla är överens om att den vetenskapliga programverksamheten ska fortsätta och utgöra tyngdpunkten i Institutets verksamhet. Men Institutets betydelse skulle kunna ökas utan att det nämnvärt skulle behöva inkräkta på programverksamheten.

Styrelsen har därför fattat ett preliminärt beslut att med början om ett par år införa en två månaders period, maj och juni, för en ny typ av verksamhet. Låt oss kalla det "Special activities period" (SAP). Institutet skall då stå öppet för kortare och av varandra oberoende aktiviteter. Detta kan t.ex. vara

1. Workshops med max 30 deltagare, längd cirka en vecka.

2. Sommarskolor, kanske 2 – 3 veckor. Cirka 25 elever och 4 – 5 lärare. Speciella doktorandkurser för huvudsakligen nordiska doktorander med förstklassiga internationella föreläsare.

3. Mindre grupper om, säg, mellan 1 och 6 personer kan samlas på Instituet för att arbeta intensivt på något särskilt projekt.

Fördelarna är

- De traditionella programmen bibehålls, men med justerad längd på våren
- Bättre utnyttjande av Institutets resurser
- Fler nordiska matematiker får tillgång till Institutet via SAP
- Mer aktiviteter (typ "sommarskolor") riktade direkt till yngre matematiker

Att införa SAP kräver ökade resurser. Beslutet är därför preliminärt i avvaktan på förbättrade finanser.

2. Finanser. Institut Mittag-Leffler är en stiftelse tillhörande Kungl. Vetenskapsakademien. Det finns ett ansenligt kapital i stiftelsen vars avkastning utgör den ekonomiska grund som Institutet står på. Men tyvärr räcker dessa medel inte på långa vägar till för att driva Institutets forskningsprogram.

Idag skulle Institutet behöva en budget på nivån cirka 15 miljoner kronor per år, vilket innebär att vi behöver stärka våra nuvarande inkomster med ca 6 miljoner kr/år. Hur har det blivit på detta sätt, och hur kan höjningen av våra intäkter åstadkommas?

Problemet med otillräcklig finansiering av våra program har funnits under lång tid. Medan kostnaderna hela tiden har ökat har våra intäkter i stort sett stått stilla eller minskat. T.ex. var bidraget från VR (tidiagre NFR) i stort sett oförändrat på nivån ca 1 miljon under åren 1997–2009, och Institutets andel av Vetenskapsakademiens statsanslag (på 600 000/år) drogs in för ca 7 år sedan. De senaste åren har dessutom nedgången på marknaden tärt på avkastningen från stiftelsen. Man har under många år nödgats kompensera bristen på intäktssidan genom överuttag från stiftelsen, vilket inte är hållbart.

Kostnaderna för att driva Institutet har ökat kraftigt och på flera sätt, utöver inflationen. Till exempel, att tillhandahålla ett tidsenligt IT-system med fiberoptisk anslutning till nätet och god datormiljö inom Institutet medför en kostnad som var betydligt mindre för 10 år sedan och mycket blygsam dessförinnan. Våra postdoktor stipendier ligger trots höjningar på en låg nivå jämfört med andra institutioner. Exemplen kan mångfaldigas.

Vi har från Institutets sida försökt att på olika sätt hitta en lösning på de finansiella problemen. Till exempel reducerades för 7 år sedan alla ersättningar till gästforskarna ganska drastiskt: arvodet mer än halverades och bidraget till resekostnader slopades. Men, det räcker inte att bara sänka kostnaderna. Vad som behövs är att öka intäkterna. Målsättningen bör vara att Institutets standard ska återskapas och sedan bibehållas på en hög nivå.

En ny stabil och långsiktig finansiering av Institutet måste åstadkommas. Den finansiär som rimligen får anses bära det huvudsakliga ansvaret är Vetenskapsrådet. Det har regeringens uppdrag att finansiera forskning av hög kvalitet. På senare tid har det talats mycket om forskningens behov av infrastuktur, och ändamålet infrastruktur har varit prioriterat. Matematikens andel av infrastrukturmedlen (läs: VRs driftsbidrag till Institut Mittag-Leffler) är skandalöst låg. De ledande matematiska forskningsinstituten i andra jämförbara länder som Tyskland, Frankrike och England får i regel ca 50–70 % av sin budget via resp lands statliga forskningsråd. Svenska VR har under de fem år jag varit föreståndare varit kallsinniga till Institutet. Våra ekonomiska behov och argumentering har tyvärr bemötts med närmast bara axelryckningar. Det faktum att matematiken, en av de största vetenskaperna både vad gäller antal forskare och (enligt min mening) betydelse, får ett skandalöst litet bidrag i jämförelse med nästan alla andra vetenskaper verkar inte bekymra VR. Ett protestbrev som skrevs av Vetenskapsakademiens första klass till VRs styrelse för två år sedan har lämnats obesvarat.

År 2008 ansökte vi om höjning av bidraget från VR från 1,1 till 6,7 miljoner. Det blev ingen höjning alls. Inte heller Wallenbergstiftelsen (Knut och Alice) ville ge oss driftsbidrag. Vi levde därför på en krisbudget under 2009. Situationen var så allvarlig att Institutets styrelse på allvar diskuterade att börja ställa in program.

Institutet ansökte för ett år sedan om höjning av VRs bidrag till 7 miljoner/år från år 2010. Resultatet blev att vi blivit tilldelade 2,5 miljoner för vardera av åren 2010 och 2011. Även om detta belopp är otillräckligt så innebär det faktum att VR alls höjer sitt bidrag ett trendbrott och signalerar, hoppas jag, en islossning.

Vi får sedan många år bidrag från våra nordiska grannländer. Ansträngningar har gjorts att öka dessa bidrag. I september 2009 samlades representanter från de svenska, danska, finska och norska forskningsråden samt matematiker från dessa länder till ett diskussionsmöte om Institutets finansiering. Det finns en god vilja hos våra grannländer att höja sina bidrag.

På lite längre sikt kan det finnas andra källor som kan bli betydelsefulla. Jag tänker då framför allt på donatorer som kan fatta intresse för Institutet. Vissa matematikinstitut utomlands har varit framgångsrika med fundraising-kampanjer. Vi har gjort flera försök att hitta svenska donatorer och sponsorer, men hittills utan framgång. Jag vore mycket tacksam om Samfundets medlemmar hjälper till att finna personer eller företag i vårt land som är villiga att stödja matematiken genom bidrag och donationer till Institutet.

Jag träffar ofta matematiker som entusiastiskt berättar om den stora betydelse som Institut Mittag-Leffler har eller har haft för deras forskning och deras vetenskapliga karriär. En del av dessa berättelser finns att läsa på vår hemsida, se www.mittag-leffler.se/info/experience/. Där finns till exempel följande citat från Prof. Jouko Väänänen, Universiteten i Helsingfors och Amsterdam:

> There are two ways, of essentially equal value, in which one's life can be brightened by the Royal Swedish Academy of Sciences. One is to receive a Nobel Prize. The other to receive an invitation to Institut Mittag-Leffler.

Detta uttrycker på ett lysande sätt den betydelse som Institutet har för nordiska matematiker. Min förhoppning är att vi gemensamt vårdar och utvecklar denna gåva så att den också kommer framtida generationers matematiker till del.

10 maj, 2010
Anders Björner
Föreståndare

The EMS and its Newsletter

Vicente Muñoz

The European Mathematical Society

The European Mathematical Society (EMS) has as its main objective the development of all aspects of mathematics in European countries. In particular, the society aims to promote research in mathematics and its applications, with particular attention to issues of mathematics education and the relationship between mathematics and society. Ultimately, the EMS has the goal of establishing a sense of identity among European mathematicians.

Created by and for the European mathematical community, the EMS is an effective intermediary between mathematicians and those responsible for policies and European Union funds.

The EMS was founded in 1990 in Madralin near Warsaw (Poland). Discussions to form the EMS began in Helsinki in 1978 during the International Congress of Mathematicians. Debates were held at the European Council of Mathematics at the instigation of Sir Michael Atiyah.

This year (2010) the EMS celebrates its 20th anniversary. A special celebration has been prepared, which will be held in Sofia, Bulgaria, on 12 July 2010. There will be a presentation of the most important moments in the life of the society by David Salinger (Publicity Officer between 2001 and 2005) and Vasile Berinde (Publicity Officer between 2006 and 2010) and photos in the EMS album will be shown. The celebration will include brief speeches by former presidents, vice-presidents and members of previous executive committees of the EMS.

The EMS is a society of societies. Most of its members are societies of mathematicians from different European countries. Today the membership of the EMS comprises about 50 mathematical societies in Europe, about 20 academic institutions, three institutional members and about 2,000 individual members who have joined through their national societies. The full list of EMS members appears at http://www.euro-math-soc.eu/member-societies.html.

The highest decision-making body is the EMS Council. The EMS Council has delegates from all national societies affiliated to the EMS and also has delegates representing individual members of the society. Therefore a meeting of the council could include a hundred people from across Europe. Obviously it is not practical to have council meetings very often and indeed the council only meets every two years. Between council meetings, the Executive Committee (EC) represents the company and carries out the mandates of the council. The EC consists of 10 members, including the president, two vice-presidents, the secretary and the treasurer. It meets at least twice a year and, by necessity, works most of the time through email (many votes are carried out electronically). It is also responsible for appointing subcommittees to address specific aspects of the work of the society. The Publicity Officer and the Editor-in-Chief of the Newsletter of the EMS are also invited to the meetings of the EC.

The EMS is responsible for organizing the ECM (European Congress of Mathematics), which is held every four years and is where the EMS prizes are awarded. These prizes (with a 6,000 euro cash award) were established with the purpose of recognizing outstanding contributions in mathematics carried out by young researchers of not more than 32 years of age.

The EMS Prizes Committee is appointed by the EMS. It consists of 15 internationally recognized mathematicians covering a wide variety of fields. The first prizes were awarded in Paris in 1992. Subsequently, they were awarded during the ECMs at Budapest 1996, Barcelona 2000, Stockholm 2004 and Amsterdam 2008.

The Felix Klein Prize was established by the EMS and the Institute for Industrial Mathematics in Kaiserslautern. It is given to a young scientist or a small group of young scientists (normally under 38 years old) for using sophisticated methods that lead to the solution of a concrete and difficult industrial problem, a solution that completely satisfies the industrial sector. The Felix Klein Prize is awarded every four years at the ECM and is allocated 5,000 euros.

The next European Congress of Mathematics, which will be the sixth, will be held in Krakow, Poland, 2-7 July 2012. A new prize will be introduced in this ECM: the EMS Otto Neugebauer Prize in the history of mathematics (sponsored by Springer).

The EMS is also involved in the formation of the Abel Prize Committee. The Abel Prize is awarded annually by the National Academy of Sciences and Letters from Norway with an endowment of about 700,000 euros.

Website of the EMS

The EMS has a new website at `http://www.euro-math-soc.eu` that contains all the information relating to the society. Everyone is encouraged to take a look at the page. It contains information on:

- News from the EMS, such as the next European Congress of Mathematics, the next meeting of the EMS Council, etc.

- Announcements of conferences that will take place in a European institution. The website of the EMS has a form through which users can send conference announcements for publication in this section.

- Job opportunities for European mathematicians.

- Information regarding the EMS awards and the various committees and subcommittees.
- A list of national societies attached to the EMS and their contact details.
- An interface for individual membership registration of the EMS and payment of the registration fee by credit card.
- It is planned to add the listings of recently published books, including small reviews, in the style of the book review section that has appeared in the Newsletter of the EMS.

In the past, members of national societies who wished to belong to the EMS had to inform their society, who then subscribed them at the end of the year. Recently, the EMS has installed a module on its website that allows any user to register with the company directly at any time. Annual dues are:

- Members of any national society: 23 euros.
- Members of societies with reciprocal (American Math. Soc., Australian Math. Soc. and Canadian Math. Soc.): 34 euros.
- Other members: 46 euros.
- Researchers with no more than two years after completion of their thesis: introductory fee of 11 euros.

As shown, the fee is quite economical. In return, besides collaborating with the purposes of the EMS, each member receives four printed issues of the newsletter each year.

The Newsletter of the European Mathematical Society

The idea of the EMS participating in editorial activities is probably as old as the society itself. The most notable result has been the creation of the Journal of the EMS (now published by Springer-Verlag on behalf of the EMS) in 1999. Almost simultaneously came the first serious plans for commercially operating publishing. The birth of this was announced by the then president of the EMS Rolf Jeltsch at the closing ceremony of the ECM in Barcelona in July 2000.

To operate as a publishing company, the European Mathematical Society has created a company called the European Mathematical Foundation (EMF). Although the EMF is legally a separate structure from the EMS, the statutes of the foundation ensure the decisive influence of the EMS. Additionally, the editorial boards of journals and book collections of the EMF are composed of mathematicians approved by the EMS. Legally, the EMF is the governing body of the EMS Publishing House, which is the publisher of the EMS.

The EMS Publishing House is a non-profit organization dedicated to the publication of journals and high quality books at all academic levels and in all fields of pure and applied mathematics. A growing proportion of the mathematical community are not satisfied with the publishing industry. The policy prices of some commercial publishers are often discussed and there is a widespread feeling that financial considerations are the first priority, while editorial and scientific issues come in second. One of the goals of the publisher of the EMS is to reverse that order of priority. Prices of publications are set as low as possible. The profits from the sale of publications are used to maintain the editorial on a sound financial basis and any excess funds are spent on achieving the aims of the EMF, as stated in its statutes.

The EMS Publishing House publishes 11 scientific journals and 10 book series, apart from the EMS Newsletter and the Oberwolfach Reports. The website is at `http://www.ems-ph.org/`.

The Newsletter of the EMS, which is published in English, is intended to distribute information relevant to European mathematicians in general and for members of the EMS in particular. It is similar to the Notices of the AMS. Its philosophy is to include articles on relevant research topics in both pure mathematics and in the interaction of mathematics with other areas of knowledge, which combines the information with entertaining content for researchers in mathematics.

The first issue of the Newsletter of the EMS came out in September 1991. Four issues are published annually. Currently the newsletter is published in March, June, September and December. The latest issue released was 75. The newsletter webpage lists all the issues published since 1999. They can be downloaded for free from

`http://www.ems-ph.org/journals/all_issues.php? Issn = 1027-488X.`

The Editorial Board is composed of the following members:

- **Editor-in-Chief:** *Vicente Muñoz.*
- **Associate Editors:** *Vasile Berinde, Krzysztof Ciesielski, Robin Wilson, Martin Raussen.*
- **Copy Editor:** *Chris Nunn* .
- **Editors:** *Chris Budd* (Applied Math./Appl. of Math.), *Jorge Buescu* (Book reviews), *Mariolina Bartolini Bussi* (Math. Education), *Dmitry Feichtner-Kozlov* (Personal Column), *Eva Miranda, Madalina Pacurar*

(Book reviews), *Frédéric Paugam, Ulf Persson, Themistocles M. Rassias* (Problem Corner), *Erhard Scholz* (History of Mathematics), *Olaf Teschke* (Zentralblatt Column).

The usual sections of the EMS Newsletter are:

- **Editorial.** The editorial aims to maintain recent and updated information on topics relevant to the society.

- **News.** One of the main objectives of the publication is the dissemination of information of interest to the European mathematical community. This includes news from the EMS (such as summaries of what was discussed at meetings of the Executive Committee or EMS Council meetings, announcements of congresses sponsored by the EMS or the Council Meetings, and important information from subcommittees of the EMS) and other news, such as conferences with a European emphasis, raising public awareness of mathematics, news on mathematics olympiads, etc.

- **Feature.** These are articles of survey type, explaining some breakthrough results or recent developments in a particular area. Research papers on pure mathematics and applied mathematics (such as mathematics and industry, and music and maths) are published. Most of the time these articles are written by a researcher at the request of the Editorial Board (we are very grateful for the cooperation of most of the people to whom we approach to ask for one of these 'jobs'). On other occasions, they are reprints or translations of articles previously published elsewhere (generally from national society newsletters). Obituaries of important mathematicians recently deceased also appear under this heading. Finally, we also receive items sent by an author to an editor to be considered for publication in the newsletter.

- **History.** Articles on mathematics with history. These are very similar to Feature articles and they are devoted to historical mathematical issues. The editor in charge of this section is Erhard Scholz.

- **Interviews.** Another jewel of the newsletter is the interviews on topics of interest to European readers, e.g. an interview with a mathematician who has received a major award (every year we publish an interview with the winners of the Abel Prize, which is regularly reprinted by the AMS) or an interview on a particular topic or with a mathematician who has had a long career.

- **Research centres.** Martin Raussen is responsible for maintaining this column, which regularly presents one of the ERCOM research centres or a research centre of excellence.

- **Education.** Mariolina Bartolini Bussi is responsible for the sections on mathematics education. She maintains the columns on the ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) and the ERME (European Society for Research in Mathematics Education).

- **Book reviews.** The book review section includes detailed reviews (one or two pages long) of two or three books, produced by an expert reviewer on the subject of the book in question. In general, these book reviews are of great interest as they include comments on the contents of the book, the strengths and weaknesses of the book, the historical context of the item and many other details. The editors in charge of this section are Jorge Buescu and Madalina Pacurar. In this section, we may have the analysis of two books on one subject or reviews of other commercial products, such as mathematical software and movies.

- **Personal column.** Dmitry Kozlov Feichtner-Kozlov is in charge of this section (appearing twice a year), which includes the awards to mathematicians (for European mathematicians in the broadest sense of the term or for prizes awarded in Europe) and a list of recently deceased European mathematicians. Any reader can send information to the editor to be taken into consideration for possible inclusion.

- **Problem corner.** Themistocles Rassias is responsible for the section of mathematical problems. This is a section of ludic flavour, where problems are proposed and solutions are given later. This section is published twice a year.

- **Letters to the editor.** This section is open to readers who want to send their complaints, comments or feedback to the newsletter for distribution to other readers. Of course, only letters to the editor that are of interest to the European mathematical community (in the opinion of the Editorial Board) are published. These letters contain the opinions of the sender and are not underwritten by the Editorial Board of the Newsletter or the EMS.

We are very proud of the large number of requests we have received asking for reprints of articles published in our newsletter.

A request to readers of Svenska Matematikersamfundets Medlemsutskick

In 2004, I was asked to be part of the Editorial Board of the Newsletter. I was in charge of the Book Reviews Section, a task that was relatively simple and very enjoyable. In July 2008, I became Editor-in-Chief of the Newsletter, a position that was held until then by Martin Raussen. Since then, I have already been in charge of preparing seven issues of the newsletter. It is an exciting but also an exhausting task. I must confess that the most rewarding moment is when I receive the new issue of the newsletter and I browse it in my hands.

The reason for this article is to do a little publicity for both the EMS and its newsletter. Olga Gil, former president of the RSME (Real Sociedad Matemática Española/Spanish Royal Mathematical Society), was a member of the EC of the EMS from 2005 to 2008. With her I had the chance to talk about the task of making more Spanish mathematicians aware of the importance of an organization like the EMS. Clearly something similar can be said about mathematicians from other European countries. In the first EC meetings that I attended, I could see the scope of work performed (with quite modest means) by the EMS. What surprised me most pleasantly was the efficiency of the EC.

I want to use these lines to make two requests to researchers across Europe. On the one hand to ask for your support for the European Mathematical Society by registering as individual members of the EMS. Many of us are members of our national mathematical society and the AMS, but not so many are members of the EMS. The EMS has slightly over 2,000 individual members, a number very similar to the number of members of a medium size national society of a European country, like the Spanish Math. Soc. (RSME). In contrast, the AMS has more than 32,000 members.

Let me mention a few reasons that will encourage membership of the EMS:

- The EMS focuses on European mathematicians. Its annual budget is around 100,000 euros, of which about 2/3 goes to the publishing and distribution of the EMS Newsletter. Much of the activity generated by the EMS is with little financial support.

- The strength of an institution is also given by the number of its members. It is obvious that increasing the number of members is an essential step for the EMS.

- EMS members receive four issues of the newsletter every year. The newsletter is freely downloadable through the website but for 23 euros a year the printed edition of the magazine is good value for money.

On the other hand, I remind everyone that their participation in the newsletter by sending articles, information, participating as a reviewer, etc., will be always very welcome and is much needed.

Finally, I thank the editor of the 'Svenska Matematikersamfundets Medlemsutskick' for giving us the opportunity to use these pages to advertise the EMS and the EMS Newsletter. I hope that its readers will also enjoy reading the EMS Newsletter.

Vicente Muñoz *Departamento de GeometrÃa y TopologÃa, Facultad de MatemÃ¡ticas,*

Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, Spain

Email: vicente.munoz@mat.ucm.es Website: `http://www.mat.ucm.es/ vmunozve`

This article is an (updated) translation of an article originally appearded (in Spanish) in *La Gaceta de la RSME*, vol. 13 (2010), no. 1, pp. 7-14. Translated by Vicente Muñoz and Chris Nunn.

◇ ◇ ◇ ◇

The Göran Gustafsson foundation is generously supporting a lecture series named after its founder.

GÖRAN GUSTAFSSON Lectures in Mathematics

June 4-8, 2010 KTH

Speaker:

Jean Bourgain

Institute for Advanced Study

Lecture series: "Expansion in linear groups and applications"

The first lecture is aimed at a general mathematical audience

Lecture 1	Expander graphs, spectral gaps and some applications Hall E1, Lindstedtsvägen 3, June 4 at 15.30 Coffee and tea will be serves from 15.00
Lecture2	Expansion in $SL(d)$ and prime number sieving Hall D2, Lindstedtsvägen 5, June 7 at 13.00
Lecture3	Survey of the methods Hall D3,Lindstedtsvägen 5, June 8 at 13.00

All interested are welcome

for abstracts see `http://www.math.kth.se/GGlectures`

The Abel Prize - The First Five Years[1]

Seym Pound

Famously, at least to mathematicians, there is no Nobel prize in mathematics. The reasons for that have been matters of wild speculation, but usually in life, the most likely explanation is often the most prosaic one, to which Arild Stubhaug also alludes in his foreword to the book, namely that Alfred Nobel was a very practical man, and mathematics clearly to him was not a practical subject. This is even stated in the statues of the prize, which calls for the invention and discovery of the passed year that has benefited mankind the most. Very few prizes that have been awarded have actually footed that bill, the X-rays of Roentgen being perhaps one of the few exceptions, and incidentally a very favorable exception, which put the Nobel Prize in the public mind from the very start.

It is worth reminding, as Stubhaug likewise does in his foreword, that efforts to set up a substantial prize in mathematics were already under way as the first centennial of Abel's birth was approaching. The King Oscar II was considered, rightly or wrongly, as being a patron of mathematics, as Mittag-Leffler had already been able to attach his name (and funds) to an international prize (which, as the educated reader already knows was, not entirely uncontroversially, given to Poincaré), and serious hopes were attached to him. In fact Stubhaug goes as far as to suggest that by splitting up the Union of Sweden and Norway in 1905 the establishment of the Abel Prize was postponed almost a century. But it is not easy to set up a prize. Some things you have control over, others not. No one could at the onset have predicted the spectacular success of the Nobel Prize, but even within the first decade Mittag-Leffler worried that a mathematical prize would have been overshadowed by the Nobel Prize. In the 1920's the Canadian Mathematician Fields instigated the medal, which subsequently would bear his name, and which incidentally was awarded for the first time in Oslo in 1936. The medal carries little money and the prize is mostly unknown outside mathematics (although of course in recent years it has been mentioned in commercial movies and the case of Perelman may at least have attached some notoriety to it) but it remains the ultimate accolade for a (young) mathematician, the announcement of which carries a lot of excitement. With the Abel Prize it is different. There is already a pride of many extremely worthy senior mathematicians any one of whom would be eminently suitable to be so rewarded, regardless whether or not they have already been appropriately rewarded in the past. Thus the announcement of an Abel Prize winner is more in the nature of a confirmation of greatness than a bestowing of the same. In particular you

[1] The Abel Prize 2003-2007: The first Five years. Helge Holden, Ragni Piene (ed), Springer ISBN 978-3-642-01372-0

do not expect the unexpected. Of course as the tradition evolves this might eventually change.

Anyway the book under review is a valiant effort to put the Abel Prize on the map, and one surmises from the title that the ambition is to produce such a volume every five years. The book is introduced by a historical survey of the prize by Arild Stubhaug, a survey to which I have already alluded. Then follows potted autobiographies of each laureate, although the editors of the book were apparently not able to induce Serre to submit one, instead there is a bilingually presented interview with the youngest Fields medalist ever. An interview that comes with a title which in its optimism borders on hybris - Mon premier demi-siécle au College de France[2] In addition to the autobiographies there are authoritative presentations of the works of the prize winners, along with exhaustive bibliographies and formal curriculum vitae. On the human interest level, the autobiographies should be most intriguing, while from the professional and educational view, the emphasis should be on the mathematical surveys. As to autobiographies one should treat that of Serre's first, as it really is not, although it does contain some personal tidbits (and one learns that he wrote his book on linear representations on groups to assist his wife who was a specialist in quantum chemistry). Instead it provides a vehicle for Serre's *obiter dicta*. The punchline is that in mathematics truth is absolute truth, and that this might be the reason for the impopularity of mathematics with the general public.

Now the real autobiographies provided are not literary masterpieces, and supposedly were never intended as such. As usual, they suffer from the blandness invariably involved in the depiction of a successful life, only in the uncertainty of the formative years, when things could have tipped one way or another, there is some drama. In particular there are intriguing glimpses such as the evocation of the Indian childhood of Varadhan, or Carleson's confession that as a young man he had a craving for classical literature. Or the little schoolboy Atiyah evading the bullis by helping them out with their homework. As Simone Weil (the sister of an obvious candidate for the prize, had it been established twenty years earlier) observed, it is boring to read about happiness, but absolutely wonderful to live it. Could it be so that the lack of drama simply merely indicates spectacular success? Still every autobiography contains some words of wisdom, one which stuck particularly in my mind, is Carleson's remark that as a young man he had a rather superficial and romantic notion of mathematics, and that it was easy for him to handle problems related to texts and thus pass the exams. But that there is nothing wrong with that. A commonsense observation that educators should take note of. There is so much high sounding rhetoric about pupils should be creative at the expense of mastering the basics. The

[2]The English translation is even more provocative, the French only suggests two 'demi-siecles', while the English intimates an unending suite of fifty-year periods.

latter is more often than not absolute prerequsities to the former, which is the responsibility of the individual not the educational institution.

Now the mathematical presentations vary widely. To write a survey of the work of Serre, having the author still alive looking over your shoulder would if anything be a daunting proposition. Pilar Bayer solves it by giving an exhaustive catalogue of Serres achievements. Such a thing could of course be very useful as a reference, but it is hardly anything that turns the pages. The most innovative approach is by Tom Körner, who makes a very valiant attempt to convey the flavour of Carleson's work, concentrating on the pointwise convergence of fourier series of L^2 functions (the so called Lusins conjecture). Körner does on one hand presuppose almost no prepatory knowledge, on the other hand he also provides rather technical expositions, for which a true neophyte would lack the necessary stomach even after multiple readings. Nevertheless I personally find his attempt charming, and worth if not emulating directly at least pursuing and developing in other contexts. This, seemingly ridiculous inconsistency, is in fact I believe an effective educational tool, because it is always very instructive to pretend that you know less than what you ostensibly do know. Nigel Hitchin makes the sensible (not to say obvious) choice to restrict himself to the Atiyah-Singer Index theorem, and I believe that from an instructive point of view, (not to mention impeccability) this is the most effective of all the surveys.

Finally each winner has their list of publications presented. Serre wins that race with his 285 listed publications (I cannot vouch for possible omissions) produced of a career spanning (so far) 62 years. Atiyah is not far behind with his 252 (the last listed bearing the intriguing title 'Mind,matter and mathematics'). Lax is awarded bronze with his 227, reducing Singer and Varadhan to also runs with their 106 and 130 respectively. Carleson lumbers in last with his measly 70, which makes you think of Gauss famous dictum - *pauca sed matura*.

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Göteborg den 21 november 2009

- 1. Till en kvadratisk sal med sidan 6 m har man anskaffat fem kvadratiska mattor, två med sidan 2 m, en med sidan 2,1 m och två med sidan 2,5 m. Är det möjligt att placera ut de fem mattorna så att de inte på något ställe överlappar varandra? Mattornas kanter behöver inte vara parallella med salens väggar.

- 2. Finn alla reella lösningar till ekvationen
$$(1+x^2)(1+x^3)(1+x^5) = 8x^5.$$

- 3. En urna innehåller ett antal gula och gröna kulor. Man drar två kulor ur urnan (utan att lägga tillbaka dem) och beräknar sannolikheten för att båda kulorna är gröna. Kan man välja antalet gula och gröna kulor så att denna sannolikhet är $1/4$?

- 4. Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen $x + x^3 = 5y^2$.

- 5. En halvcirkelbåge och en diameter AB med längden 2 är given. Låt O vara diameterns mittpunkt. På radien vinkelrät mot diametern väljer vi en punkt P på avståndet d från diameterns mittpunkt O, $0 < d < 1$. En linje genom A och P skär halvcirkeln i punkten C. Genom punkten P drar vi ytterligare en linje vinkelrätt mot AC. Den skär halvcirkeln i punkten D. Genom punkten C drar vi så en linje, l_1, parallell med PD och därefter en linje, l_2, genom D parallell med PC. Linjerna l_1 och l_2 skär varandra i punkten E. Visa att avståndet mellan O och E är lika med $\sqrt{2-d^2}$.

- 6. På ett bord ligger 289 enkronorsmynt och bildar ett kvadratiskt 17×17 -mönster. Alla mynten är vända med krona upp. Vid ett drag får man vända på fem mynt som ligger i rad: lodrätt, vågrätt eller diagonalt. Är det möjligt att efter ett antal sådana drag få alla mynten vända med klave upp?

- Skrivtid: 5 timmar

- Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

De sex överst rankade med poäng.

Namn	Skola	Ort	Poäng
Alex Loiko	Danderyds gymnasium	Danderyd	30
Vladimir Grozman	Danderyds gymnasium	Danderyd	22
Axel Flinth	Hvitfeldtska gymnasiet	Göteborg	21
Simon Lindholm	Kärrtorps gymnasium	Johanneshov	21
Emil Cronemyr	Bergska skolan	Finspång	16
Josef Hansson	Berzeliusskolan	Linköping	15

De efterföljande tolv i bokstavsordning

Namn	Skola	Ort
Erland Arctaedius	Danderyds gymnasium	Danderyd
Marcus Aronsson	Uddevalla gymnasieskola	Uddevalla
Hannes Carlsson	Lars Kaggskolan	Kalmar
Sebastian Ekström	Katedralskolan	Lund
Jonas von Essen	Västerhöjdsgymnasiet	Skövde
Benjamin Fayyazuddin-Ljungberg	Katedralskolan	Uppsala
Johan Henriksson	Rosendalsgymnasiet	Uppsala
Jakob Jonsson Åberg	Lundellska skolan	Uppsala
Joel Li	Malmö Borgarskola	Malmö
Hampus Ohlander	Sven Eriksonsgymnasiet	Borås
Jonas Olsson	Danderyds gymnasium	Danderyd
Olof Salberger	Hvitfeldtska gymnasiet	Göteborg
Rebecca Staffas	Växjö Katedralskola	Växjö
Yun-Hwan Sul	Hvitfeldtska gymnasiet	Göteborg

Svenska matematikersamfundets årsmöte i Umeå, 4-5 juni 2010

Svenska matematikersamfundets årsmöte äger rum Fredag 4 juni 13.00 - Lördag 5 juni 12.00 i sal MA346 i MIT-huset (märkt V på kartan). Rekommenderat hotell: Hotell Pilen

Program

Fredag 4 juni

13.00 - 13.10 Välkomna

13.10 - 14.00 Vladimr Kozlov,
Water waves and the Benjamin-Lighthill conjecture

14.00 - 14.30 Kaffe

14.30 - 15.20 Kaj Nyström,
Free boundary and inverse type problems for the p-Laplace Operator

15.30 - 16.00 Bo Berndtsson,
Presentation av årets Wallenbergpristagare Robert Berman

16.00 - 16.10 Utdelning av Wallenbergpriset till Robert Berman
16.20 Årsmöte
18.00 Middag

Lördag 5 juni

08.30 - 09.20 John Andersson
Linearisation and Free Boundaries

09.20 - 09.50 Kaffe

09.50 - 10.40 Torsten Ekedahl,
Presentation av årets Abelpristagare Tate.

10.50 - 11.40 Lars-Erik Persson,

My life with Hardy and his inequalities

Abstracts

Vladimr Kozlov, Water waves and the Benjamin-Lighthill conjecture

In 1954, Benjamin and Lighthill made a conjecture concerning the classical nonlinear problem of steady gravity waves on water of finite depth. According to this conjecture, all water waves can be parametrized by two parameters from a certain region, one of them is the Bernoulli's constant and the second one is the flow force. I'll talk about research around this conjecture and about latest progress in proving it. In particular, I'll present a joint with N. Kuznetsov work, where we proved this conjecture for near-critical Bernoulli's constant.

Kaj Nyström, Free boundary and inverse type problems for the p-Laplace Operator

In [C1,C2,C3] s theory for general two-phase free boundary problems for the Laplace operator was developed. In [C1] Lipschitz free boundaries were shown to be $C^{1,\gamma}$-smooth for some $\gamma \in (0,1)$ an din [C2] it was shown that free boundaries which are well approximated by Lipschitz graphs are in fact Lipschitz. Finally in [C3] the existence part of the theory was developed. In [LN1],[LN2] John Lewis and I study the corresponding problems for the p-Laplace operator and we generalize the results in [C1,C2] to the p-Laplace operator when $p \neq 2, 1 < p < \infty$. Furthermore in [LN3] we resolve a number of problems concerning regularity and free boundary regularity, nelow the continuous threshold, for the p-Laplcae operator, $1 < p < \infty$, in domains $\Omega \subset \mathbf{R^n}, \mathbf{n} \geq \mathbf{2}$, which are assumed to be Reifenberg flat and Ahlfors regular. In particular in [LN3] we establish a p-harmonic version of the results established in [KT,KT1,KT2,KT3] concerning harmonic fucntions. We claim that all of these generalizations are highly non-trivial due to the non-linear and degenerate character of the p-Laplace operator for $p \neq 2$. The purpose of this talk is to briefly discuss some of these recent results.

References

[C1] L.Caffarelli, *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. Part I, Lipschitz free boundaries are $C^{1,\alpha}$*, Revista Math.Iberoamericana **3** (1987), 139-162.

[C2] L.Caffarelli, *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. Part II, Flat free boundaries are Lipschitz,* Comm. Pure Appl.Math **42** (1989) no.1,55-78

[C4] L.Caffarelli, *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. Part III, Existence theory, compactness, and dependence on X,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl.Sci (4)**15** (1988) no.4,583-602

[KT] C.Kenig and T.Toro, *Harmonic measure on locally flat domains,* Duke Math J. **87** (1997), 501-551

[KT1] C.Kenig and T.Toro, *Free boundary regularity for harmonic measure and Poisson kernels,* Ann. of Math.. **150** (1999), 369-454

[KT2] C.Kenig and T.Toro, *Poisson kernel characterization of Reifenberg flat chord arc domains,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **36** (2003), no. 3, 323-401

[KT3] C.Kenig and T.Toro, *Free boundary regularity below the continuous threshold: 2-phase problems*, Journal för Reine und Angewandte Mathematatik **596** (2006), 1-44.

[LN1] J.Lewis and K.Nyström, *Regularity of Lipschitz Free Boundaries in Two-phase Problems for the* p-*Laplace Operator*, to appear in Advances in mathematics.

[LN2] J.Lewis and K.Nyström, *Regularity of Flat Free Boundaries in Two-phase Problems for the* p-*Laplace Operator*, submitted.

[LN3] J.Lewis and K.Nyström, *Regularity and Free Boundary Regularity for the* p-*Laplace Operator in Reifenberg Flat and Ahlfors Regular Domains*, in preparation

John Andersson, Linearisation and Free Boundaries

A free boundary problem consists of solving a partial differential equation in domain Ω that is not apriori given. Finding Ω, or equivalently the boundary of Ω, is part of the problem. Usually part of the boundary is specified and part of the boundary is free or not apriori determined. On the free boundary we are given overdetermined boundary data. For instance both Dirichlet and Neumann conditions. The aim of this talk is to describe some general techniques of proving regularity of the free part of the boundary.

Lars-Erik Persson, My life with Hardy and his inequalities

I will first describe something from the dramatic prehistory of 10 years of work until Hardy in 1925 finally proved his famous inequality. In particular, I will shortly describe my own experience when I a summer wrote the first version of [4] by almost living and feeling as I think Hardy did during this period. After that I will present a "one line convexity proof" of the inequality we now have discovered and developed and which could have changed both the prehistory and history if Hardy had found it. Finally, I will present some important problems, results and applications obtained and described in the rich liturature in the field, see e.g. the booksÂ Â Â [1]-[3] and the references given there.

References

[1] A. Kufner and L.E. Persson, Weighted Inequalities of Hardy Type, World Scientific, New/JerseyLondon/Singapore/Hong Kong, 2003 (357 pages).

[2] A. Kufner, L. Maligranda and L.E. Persson, The Hardy Inequality. About its History and some Related Results, Vydavatelsky Servis Publishing House, Pilsen, 2007 (161 pages).

[3] A. Meshki, V. Kokalishvili and L.E. Persson, Weighted Norm Inequalities for Integral Transforms with Product Kernels, Nova Scientific Publishers, Inc., Springer, New York, 2009 (329 pages).

[4] A. Kufner, L. Maligranda and L.E. Persson,The prehistory of the Hardy inequality, Amer. Math. Monthly 113 (8), 715-732, 2006.

Svenska matematikersamfundet
Resultaträkning för året 1 maj 2009 till 30 april 2010

Intäkter	
Medlemsavgifter, individuella årsbetalande	5 650 kr
Medlemsavgifter, institutioner årsbetalande	91 500 kr
Medlemsavgifter, ständiga medlemskap	10 000 kr
Medlemsavgifter, EMS	2 287 kr
Räntor och utdelningar	225 kr
Donation Wallenberg	300 000 kr
Diverse	6 590 kr
Underskott	**8 140 kr**
Summa	**424 337 kr**

Kostnader	
Möteskostnader	53 883 kr
Resestipendier och bidrag	38 721 kr
EMS-avgifter	19 503 kr
Förvaltningskostnader	5 412 kr
Diverse	6 873 kr
Wallenbergpriset	300 000 kr
Summa	**424 337 kr**

Balansräkning

Tillgångar	**2010-04-30**	**2009-04-30**
Postgiro	10 597 kr	34 827 kr
SEBföretagskonto	56 895 kr	15 915 kr
SEB Enkla sparkonto	35 788 kr	60 678 kr
SEB fondkonto	919 383 kr	791 906 kr
Summa	**1 022 663 kr**	**903 326 kr**

Skulder och eget kapital	
Ingående balans	903 326 kr
Värdeökning fondkonto	127 477 kr
Underskott i verksamhet	8 140 kr
Eget kapital: Summa 30-04-2010	**1 022 663 kr**

Linköping 3 maj 20010

Milagros Izquierdo, skattmästare

Svenska matematikersamfundet

Resultaträkning för Linda Petrés minnesfond för året 1 maj 2009 till 30 april 2010

Intäkter	
Bidrag	300 kr
Räntor	0 kr
Summa	**300 kr**
Kostnader	
Summa	**0 kr**
Överskott i verksamheten	**300 kr**

Balansräkning

Tillgångar	**2010-04-30**	**2009-05-01**
SEB checkkonto[3]	31 935 kr	31 635 kr
SEB fondkonto	296 802 kr	269 986 kr
Summa	**328 737 kr**	**301 621 kr**

Skulder och eget kapital	
Ingående balans	301 621 kr
Värdeökkning fondkonto	26 816 kr
Överskott i verksamheten	300 kr
Eget kapital: Summa 30-04-2010	**328 737 kr**

Linköping 3 maj 2010

Milagros Izquierdo, skattmästare av Svenska matematikersamfundet

Svenska matematikersamfundet

Resultaträkning för Matts Esséns minnesfond för året 1 maj 2009 till 30 april 2010

Intäkter	
Bidrag	0 kr
Ränta	13 kr
Summa	**13 kr**
Kostnader	
Stipendium	0 kr
Förvaltningskostnader	0 kr
Summa	**0 kr**
Överskott i verksamheten	**13 kr**

Balansräkning

Tillgångar	**2010-04-30**	**2009-04-30**
SEB checkkonto[4]	7 268 kr	7 255 kr
SEB fondkonto	97 398 kr	85 625 kr
Summa	**104 666 kr**	**92 880 kr**

Skulder och eget kapital	
Ingående balans	92 880 kr
Värdeökning fondkonto	11 773 kr
Överskott i verksamhet	13 kr
Eget kapital: Summa 30-04-2010	**104 666 kr**

Linköping 3 maj 2010

Milagros Izquierdo, skattmästare av Svenska matematikersamfundet

Svenska Matematikersamfundets årsmöte

fredagen den 4 juni 2010 kl 16.30

Umeå universitet, sal MA346 i MIT-huset

1. Mötets öppnande.

2. Val av mötesordförande och mötessekreterare.

3. Val av två justeringspersoner.

4. Fastställande av dagordning.

5. Framläggande av styrelseberättelse, balansräkning och revisionsberättelse.

6. Frågan om beviljande av styrelsens ansvarsfrihet.

7. Val av styrelse för verksamhetsåret 09/10.

8. Val av lokalombud för verksamhetsåret 09/10.

9. Val av två revisorer och två revisorssuppleanter för verksamhetsåret 09/10.

10. Val av tävlingskommitté för verksamhetsåret 09/10.

11. Val av valberedning för verksamhetsåret 09/10.

12. Barcelonakonferensen, september 2010.

13. Medlemsutskicket – diskussion om utgivningsform

14. Övriga frågor.

15. Mötets avslutande.

Sista Ordet

Hvorfor være medlem av SMS?

Dan Laksov

I lenger tid enn jeg ønsker å huske har jeg oppfordret doktorander, gymnaslærere og kolleger til å bli medlemmer av SMS. Forbausende mange kjenner ikke til SMS, og flere av de som gjør det undrer på hvorfor de skal være med. Selv mener jeg det burde rekke langt med å henvise til deler av formålsparagrafene for SMS, *Vårt syfte är att främja matematiken, bl a genom att förbättra kontakterna mellan professionella matematiker, såväl nationellt som internationellt, och genom att sprida information om matematikens växande betydelse i samhället. Inte minst gäller detta inom skolväsendet* .... Tydeligvis er det et eksotisk standpunkt at dette er tilstrekkelig, så det har vært nødvendig å supplere med andre argumenter for å bli medlem:

- SMS arrangerer hvert år et flertall møter og har dessuten utdannelsesdager for gymnaslærere, Matematikbiennaler, og Matematikbienetter. Mitt inntrykk er at det har blitt færre møter og jeg er usikker på om utdannelsesdagene finnes.

- SMS deltar aktivt med å arrangere matematikk-konkurranser og sammenkomster for skolene. For eksempel, *skolornas matematiktävling* og Sonja Kovalevskydagene.

- SMS deler ut en rekke priser og stipendier til yngre forskere.

- SMS utgir *Medlemsutskicket* som, under Ulf Perssons redaktørskap, har utviklet seg fra nesten ingen ting til å bli et informasjonsrikt og tidvis underholdende organ. Desverre har ledningen for SMS nylig bestemt at *Medlemsutskicket* skal ligge på nettet, så privilegiet å få *Medlemstskicket* i papirform forsvinner som argument for å bli medlem i SMS.

- SMS er ofte remissinstans for offentlige utredninger.

- Foretredere for SMS deltar som observatører ved matematiske møter som Biennalen, ICM og ECM.

  For meg gir alt dette mer enn nok valuta for de SEK 200 som et årsmedlemskap koster. Tross dette er det mange som er tvilsomme til å bli medlemmer. Noen av den tåpelige årsaken at de ikke behøver å være medlemmer for å nyte godt av aktivitetene. Av de som forstår at et medlemskap støtter SMS er det en del som ikke vil være medlem fordi SMS ikke representerer matematikken og matematikere kraftfullt nok utad. Her er noen argumenter jeg har støtt på:

- I offentlige utredninger representeres matematikken oftest av personer fra NCM eller KVA. Den første er et statlig organ som knapt har noen kontakt med universitetsmatematikken, og den andre representerer, på grunn av innvalgsordningen, bare seg selv. Her burde SMS agere kraftfullt for å få med egne representanter.

- SMS har knapt reagert for eller imot den flod av emnesdidaktikere, med ubetydelig innsikt i matematikken, som oversvømmer høyskoler og universitet. Dessuten har SMS ikke hatt noen synspunkter på de, sett med matematikeres øyne, urusle doktorgradene i emnesdidaktikk.

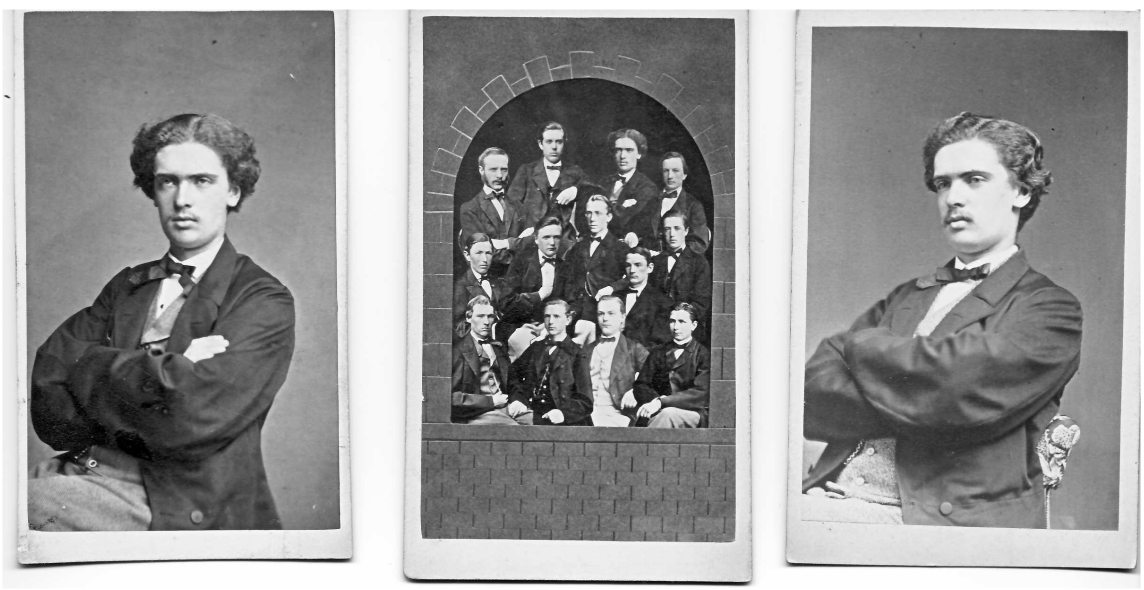
- De fleste matematikere har med avsky sett hvordan kolleger, ofte med utenlandsk bakgrunn, har blitt avskjediget eller tvunget til å si opp seg fra faste stillinger ved høyskoler og universiteter i Sverige. Bakgrunnen er oftest feilaktige og løgnaktige påstander om personenes forskning og undervisning, og er helt uakseptable fra en matematikers synspunkt. SMS har vært skuffende passiv i sin reaksjon på dette.

- SMS deltar skjelden i den offentlige debatten om matematikk og matematikkundervisning, og fremstiller seg heller ikke som representant for matematikerne. Et typeeksempel finner vi i forrige *Medlemsutskick*. Der beskrives *Vetenskapsrådet's* (VR's) og *Stiftelsen för Strategisk Forskning's* utvurdering av svensk matematikk, Den sies å være av sentral betydelse for VR's fremtidige satsning på svensk matematisk forskning, og at flere medlemmer har uttrykt uro for vikende trender i finansieringen. Den eneste offisielle kommentaren om utvurderingen fra SMS er, *jag hoppas att den faller väl ut.*

Det er mulig at ledningen for SMS er fornøyet med de 500 medlemmene foreningen har. Hvor mange av disse er forresten persolige medlemmer og hvor mange er institusjonelle? Om ledningen ønsker å øke medlemstallet foreslår jeg at de lar oss vite hvorfor man skal være medlem av SMS. Skriv begrunnelsen på et A4 ark og distribuer dette til alle nuværende og potensielle medlemmer av SMS.

Sista Bilderna

Mittag-Leffler discussing with friends in his library



Mittag-Leffler as a very young man

Pictures published with the kind permission of the Mittag-Leffler Institute

KALENDARIUM

(Till denna sida uppmanas alla, speciellt lokalombuden, att inlämna information)

Finsk-svensk talteorikonferens
KTH 26-28 maj
Tate-Symposiet
Beijersalen 31 maj
Jean Bourgoine
KTH 4-8 juni
Årsmötet
Umeå 4-5 juni
Svensk-Catalanskt möte
Barcelona 16-18 september

Författare i detta nummer

Gert Almkvist Föreståndare för Algebraisk Meditation i Höör. Numera verksam som talteoretiker.

Bo Berndtsson Ordförande för KVA's Första klass. Plurikomplex forskare.

Anders Björner Föreståndare för Mittag-Leffler Institutet.

Jim Carlson Föreståndare för Clay Institutet.

Peter Hackman Lektor emeritus i Linköping.

Pär Kurlberg Talteoretiker och nybliven Göran Gustafsson pristagare

Dan Laksov Stridbar debattör. Professor emeritus vid KTH.

Vicente Munoz Huvudredaktör för EMS-Newsletter.

Loren Olson Elliptisk talteoretiker verksam i Tromsö. Ursprungligen frûn North Dakota.

Seym Pound Ambulerande skribent.

Arild Stubhaug Författare av biografier om Abel, Lie och Mittag-Leffler.

Innehållsförteckning

Notiser